Kommutative Algebra

Denis-Charles Cisinski

Universität Regensburg

29. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Exakte Sequenzen

Sei R ein Ring mit Eins (nicht notwendig kommutativ). Sind M und N zwei R-Moduln, so bezeichnen wir $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ den R-Modul von R-lineare Abbildungen von M nach N.

1.1 (Kern). Sei $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung. Es ist

$$\ker(f) = \{x \in M \,|\, f(x) = 0\}$$

ein Untermodul. Es gilt

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}.$$

Außerdem gilt die folgende universelle Eigenschaft, wobei $i : \ker(f) \longrightarrow M$ die Inklusionsabbildung ist: zu jeder R-lineare Abbildung $v : V \longrightarrow M$ mit $f \circ v = 0$ (also mit $f(v(x)) = 0$ für alle $x \in V$) gibt es genau eine R-lineare Abbildung $u : V \longrightarrow \ker(f)$ mit $i \circ u = v$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, dotted, "u"'] \arrow[d, "v"] & \\
\ker(f) \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

1.2 (Quotient). Sei M ein R-Modul und sei $N \subset M$ ein Untermodul. Es ist M/N die Menge von Restklassen modulo V. Ist $x \in M$ so schreiben wir $\bar{x} = x + N$ für seine Restklasse. Es gibt genau eine Struktur von R-Modul auf M/N, so dass die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} p : M &\longrightarrow M/N \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

ein R-Modulnhomomorphismus ist. Die universelle Eigenschaft des Quotients ist: zu jeder R-lineare Abbildung $v : M \longrightarrow V$ mit $v(x) = 0$ für alle $x \in N$ gibt es genau eine R-lineare Abbildung $u : M/N \longrightarrow V$ mit $u(\bar{x}) = v(x)$ für alle $x \in M$.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"'] & M/N \arrow[dl, dotted, "u"] \\
 & V &
\end{tikzcd}$$

1.3 (Kokern). Sei $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung. Dann gibt es den Kokern

$$\mathrm{coker}(f) = N/\mathrm{im}(f)$$

von f, und es kommt mit der kanonischen Projektion

$$p : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{coker}(f).$$

Dann ist die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: zu jede R-lineare Abbildung $v : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{V}$ gibt es genau eine R-lineare Abbildung $u : \mathrm{coker}(f) \longrightarrow \mathrm{V}$ mit $u \circ p = v$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "f"] & \mathrm{N} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{coker}(f) \arrow[dl, dotted, "u"'] \\ & \mathrm{V} & \end{tikzcd}$$

(Folgt einfach aus der universellen Eigenschaft des Quotients.)

Definition 1.4 (Exakte Sequenze)**.** Ein Diagram von R-Moduln der Form

$$\mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P}$$

ist eine *exakte Sequenz*, wenn die zwei folgenden Eigenschaften gelten:

1. es ist $g(f(x)) = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}$;
2. ist $y \in \mathrm{N}$ mit $g(x) = 0$, so existiert ein $x \in \mathrm{M}$ mit $f(x) = y$.

Äquivalent gilt

$$\ker(g) = \mathrm{im}(f).$$

Im Allgemeinen, sei $n \geq 0$, ist ein Diagramm von R-Moduln der Form

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{f_1} \mathrm{M}_1 \xrightarrow{f_2} \mathrm{M}_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} \mathrm{M}_n$$

eine *exakte Sequenz*, wenn $\ker(f_i) = \mathrm{im}(f_{i-1})$ für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gilt.
Eine *exakte Sequenz links* ist eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P}.$$

Eine *exakte Sequenz recht* ist eine exakte Sequenz der Form

$$\mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P} \longrightarrow \{0\}.$$

Eine *kurze exakte Sequenz* is eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P} \longrightarrow \{0\}.$$

Beispiel 1.5. Eine R-lineare Abbildung $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ ist genau dann injektiv, wenn das Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N}$$

eine exakte Sequenz ist.

Beispiel 1.6. Ein Diagramm von R-Moduln

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P.$$

ist eine links exakte Sequenz genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) die Abbildung f ist injektiv;

(ii) es ist $g \circ f = 0$;

(iii) die induzierte Abbildung $M \longrightarrow \ker(g)$ ist ein Isomorphismus.

Äquivalent:

(i') für jedes $x \in M$ gilt $g(f(x)) = 0$;

(ii') für jedes $y \in N$ mit $g(y) = 0$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

Beispiel 1.7. Eine R-lineare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist genau dann surjektiv, wenn das Diagramm

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz ist.

Beispiel 1.8. Ist $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so erhalten wir eine kanonische exakte Sequenz:

$$\{0\} \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow \{0\}.$$

Also ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz ist.

1.9. Für zwei R-Moduln M und N ist $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ der Modul von R-linearen Abbildungen $M \longrightarrow N$. Ist $f : M' \longrightarrow M$ eine R-lineare Abbildung, so ist die Abbildung

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N)$$
$$u \longmapsto u \circ f$$

R-linear. Analog, für eine R-lineare Abbildung $g : N \longrightarrow N'$ ist die Abbildung

$$g_* : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N')$$
$$u \longmapsto g \circ u$$

R-linear.

Hilfsatz 1.10. *Ein Morphismus von* R*-Moduln* $f : M \longrightarrow N$ *ist genau dann injektiv, wenn für alle* R*-Moduln* V *die Abbildung*

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(V, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, N)$$

injektiv ist.

Beweis. Für $V = R$ ist $\mathrm{Hom}_R(V, M) \cong M$ durch $u \longmapsto u(1)$. Ist f_* injektiv für $V = R$, so ist die Abbildung f injektiv, denn sie isomorph zu $f_* : \mathrm{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M)$ ist.
Umgekehrt, ist f injektiv und sei V ein beliebiger R-Modul, so ist die induzierte Abbildung

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(V, M) \longmapsto \mathrm{Hom}_R(V, N)$$

injektiv denn: ist $u : V \longrightarrow M$ R-linear mit $f \circ u = 0$, dann ist $f(u(x)) = 0$ für alle $x \in V$; da f injektiv ist folgt es, dass $u(x) = 0$ für jedes Element x von V gilt. Also ist $u = 0$. □

Satz 1.11. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P.$$

eine exakte Sequenz links. Zu jeder R*-lineare Abbildung* $v : V \longrightarrow N$ *mit* $g \circ v = 0$ *gibt es genau eine* R*-lineare Abbildung* $u : V \longrightarrow M$ *mit* $f \circ u = v$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dotted, "u"'] \arrow[d, "v"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $i : \ker(g) \longrightarrow N$ die Inklusionsabbildung. Da $g \circ f = 0$ gilt gibt es genau eine R-lineare Abbildung $q : M \longrightarrow \ker(g)$ mit $i \circ q = f$. Die Abbildung q ist surjektiv denn $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ gilt. Da f injektiv ist folgt es, dass q bijektiv ist. Die universelle Eigenschaft des Kerns heißt, dass es genau eine R-lineare Abbildung $w : V \longrightarrow \ker(g)$ mit $i \circ w = v$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dotted, "w"'] \arrow[d, "v"] & \\ \ker(g) \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Sei $u = q^{-1} \circ w : V \longrightarrow M$. Es ist für jedes $x \in V$

$$\begin{aligned} f \circ u &= i \circ q \circ u \\ &= i \circ q \circ q^{-1} \circ w \\ &= i \circ w \\ &= v \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von u folgt aus Lemma 1.10. □

Korollar 1.12. *Ein Diagramm von* R*-Moduln der Form*

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

ist genau dann eine exakte Sequenz links, wenn für alle R*-Moduln* V,

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(V, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(V, P)$$

eine exakte Sequenz links ist.

Beweis. Sei

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

eine exakte Sequenzen links und sei V ein R-Modul. Es folgt aus Satz 1.11, dass die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(V, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(V, P)$$

exakt links ist.
Umgekehrt, ist die Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(V, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(V, P)$$

für alle V exakt links, dann mit V = R erhalten wir bis auf Isomorphie eine exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P,$$

was zu beweisen wäre. □

Hilfsatz 1.13. *Ein Morphismus von* R*-Moduln* $f : M \longrightarrow N$ *ist genau dann surjektiv, wenn für alle* R*-Moduln* V *die Abbildung*

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, V)$$

injektiv ist.

Beweis. Sei f surjektiv und sei $u : N \longrightarrow V$ eine R-lineare Abbildung mit $u \circ f = 0$. Dann, für jedes Element $y \in N$ gilt $u(y) = 0$ denn es existiert ein Element $x \in M$ mit $f(x) = y$, so dass $u(y) = u(f(x)) = 0$ gilt.
Umgekehrt, sei f^* injektiv für alle R-Moduln V. Wir werden zeigen, dass $\mathrm{im}(f) = N$ gilt. Sei

$$p : N \longrightarrow \mathrm{coker}(f) = N/\mathrm{im}(f)$$

die kanonische Projektion. Es ist $p \circ f = 0$. Also ist $f^*(p) = 0$. Da f^* injektiv für $V = \mathrm{coker}(f)$ ist folgt es, dass $p = 0$ gilt. Das heißt, dass $\mathrm{im}(f) = N$ ist. □

Satz 1.14. *Sei*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz recht. Zu jeder R*-lineare Abbildung* $v : N \longrightarrow V$ *mit* $v \circ f = 0$ *gibt es genau eine* R*-lineare Abbildung* $u : P \longrightarrow V$ *mit* $u \circ g = v$*.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & P \arrow[dl, dotted, "u"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $v : N \longrightarrow V$ eine R-lineare Abbildung mit $v \circ f = 0$. Nach dem universellen Eigenschaft des Quotients gibt es genau eine R-lineare Abbildung $w : \mathrm{coker}(f) \longrightarrow V$ mit $w \circ p = v$, wobei $p : N \longrightarrow \mathrm{coker}(f)$ die kanonische Projektion ist.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{coker}(f) \arrow[dl, dotted, "w"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Analog gibt es genau eine R-lineare Abbildung $q : \mathrm{coker}(f) \longrightarrow P$ mit $q \circ p = g$. Die Abbildung q ist surjektiv denn g surjektiv ist, und sie ist auch injektiv da $\ker(g) = \mathrm{im}(f) = \ker(p)$ und

$$\ker(q) = \ker(g)/\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f)/\mathrm{im}(f) = \{0\}.$$

Sei $u = w \circ q^{-1} : P \longrightarrow V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u \circ g &= w \circ q^{-1} \circ q \circ p \\ &= w \circ p \\ &= v . \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von u folgt aus der Surjektivität von g nach Lemma 1.13. □

Korollar 1.15. *Ein Diagramm von* R*-Moduln der Form*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

ist genau dann eine exakte Sequenz recht, wenn für alle R*-Moduln* V*,*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N, V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, V)$$

eine exakte Sequenz links ist.

Beweis. Ist

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenze recht, dann ist

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N,V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(V,M)$$

eine exakte Sequenze links für alle V, nach Satz 1.14. Umgekehrt, haben wir exakte Sequenzen für alle V wie oben, so ist insbesondere g surjektiv, nach Lemma 1.13. Es ist auch $g \circ f = 0$ da

$$g \circ f = id_P \circ g \circ f = f^*(g^*(id_P)) = 0$$

gilt. Insbesondere ist $\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$. Sei $p : N \longrightarrow \mathrm{coker}(f)$ die kanonische Projektion. Nach der universellen Eigenschaft des Quotients gibt es genau eine R-lineare Abbildung $q : \mathrm{coker}(f) \longrightarrow P$ mit $q \circ p = g$. Es gibt eine exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,\mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{coker}(f),M)$$

und $f^*(p) = p \circ f = 0$. Daher gibt es genau eine R-lineare Abbildung $q' : P \longrightarrow \mathrm{coker}(f)$ mit $q' \circ g = p$. Es ist $q' \circ q$ die Identität da $q' \circ q \circ p = p$ gilt, nach der universellen Eigenschaft des Quotients. Analog ist $q \circ q'$ die Identität. Das heißt, dass q bijektiv ist. Daher ist $\mathrm{im}(f) = \ker(p) = \ker(g)$. $\square$

Aufgabe 1.16. Sei

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ P & \xrightarrow{g} & Q \end{array} \qquad b \circ f = g \circ a$$

ein kommutatives Quadrat von R-Moduln.

1. Angenommen gibt es eine exakte Sequenz links

   $$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \oplus P \xrightarrow{\psi} Q$$

   wobei $\varphi(x) = (f(x), a(x))$ und $\psi(y,z) = b(y) - g(z)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung f bzw. a einen Isomorphismus $\ker(a) \cong \ker(b)$ bzw. $\ker(f) \cong \ker(g)$ induziert.

2. Angenommen Angenommen gibt es eine exakte Sequenz links

   $$M \xrightarrow{\varphi} N \oplus P \xrightarrow{\psi} Q \longrightarrow \{0\}$$

   wobei φ und ψ wie oben definiert sind. Zeigen Sie, dass die Abbildung g bzw. b einen Isomorphismus $\mathrm{coker}(a) \cong \mathrm{coker}(b)$ bzw. $\mathrm{coker}(f) \cong \mathrm{coker}(g)$ induziert.

3. Angenommen ist f surjektiv und a induziert einen Isomorphismus $\ker(f) \cong \ker(g)$. Zeigen Sie, dass

   $$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \oplus P \xrightarrow{\psi} Q$$

   eine exakte Sequenz links ist.

4. Angenommen ist g injektiv und b induziert einen Isomorphismus $\mathrm{coker}(f) \cong \mathrm{coker}(g)$. Zeigen Sie, dass
$$M \xrightarrow{\varphi} N \oplus P \xrightarrow{\psi} Q \longrightarrow \{0\}$$
eine exakte Sequenz recht ist.

5. Sei M ein R-Modul und seien $P \subset N \subset M$ Untermoduln. Erklären Sie warum aus Frage 2. folgt es, dass der noethersche Isomorphismus
$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$
gilt. Zeigen Sie, dass es eine kurze exakte Sequenz der Form
$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow N/P \oplus M \longrightarrow M/P \longrightarrow \{0\}$$
gibt.

Aufgabe 1.17. Sei
$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}.$$
ein Diagramm von R-Moduln. Zeigen Sie, dass die Folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. Dieses Diagramm ist eine kurze exakte Sequenz und es gibt ein R-Modulnhomomorphismus $s : P \longrightarrow N$ mit $g \circ s = id_P$.

2. Dieses Diagramm ist eine kurze exakte Sequenz und es gibt ein R-Modulnhomomorphismus $r : N \longrightarrow M$ mit $r \circ f = id_M$.

3. Es gibt einen Isomorphismus von R-Moduln $\varphi : M \oplus P \xrightarrow{\simeq} N$, so dass f bzw. g die Komposition von φ mit der kanonischen Inklusionsabbildung $M \subset M \oplus P$ bzw. die Komposition von der kanonischen Projektion auf P mit φ ist.

4. Für jeden R-Modul V ist
$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N, V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(V, M) \longrightarrow \{0\}$$
eine kurze exakte Sequenz.

5. Für jeden R-Modul V ist
$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(V, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(V, P) \longrightarrow \{0\}$$
eine kurze exakte Sequenz.

Kapitel 2

Exakte Sequenzen vergleichen und konstruieren

Satz 2.1 (Fünferlemma)**.** *Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von* R*-Moduln der Form*

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[d, "w"'] \\
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & U' \arrow[r, "p'"] & V' \arrow[r, "q'"] \arrow[d] & W' \\
\{0\} & \{0\} & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

wobei jede Zeile und jede Reihe exakt ist (also ist jede Zeile exakt mit m surjektiv, w injektiv, und beide n und v bijektiv). Dann ist u ein Isomorphismus.

Beweis. Zu Injektivität –. Sei $x \in U$ mit $u(x) = 0$. Also ist

$$p'(u(x)) = v(p(x)) = 0 \quad \text{mit } v \text{ bijektiv.}$$

Daher es folgt, dass $p(x) = 0$ gilt. Also gibt es ein Element $y \in N$ mit $g(y) = x$, denn $\ker(p) = \operatorname{im}(g)$. Es ist

$$0 = u(x) = u(g(y)) = g'(n(y)) \quad \text{und} \quad \ker(g') = \operatorname{im}(f').$$

Daher gibt es $z' \in M'$ mit $f'(z') = n(y)$. Es gibt $z \in M$ mit $z' = m(z)$ denn m surjektiv ist. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} n(f(z)) &= f'(m(z)) \\ &= f'(z') \\ &= n(y). \end{aligned}$$

Aus der Injektivität von n folgt es, dass $f(z) = y$ ist. Daher gilt $x = g(y) = g(f(z)) = 0$.
Zu Surjektivität –. Sei $x' \in U'$. Wir schreiben $a' = p'(x')$ und $a = v^{-1}(a')$, so dass

$$p'(x') = a' = v(a)$$

gilt. Es ist $q(a) = 0$ denn $w(q(a)) = q'(v(a)) = q'(p'(x')) = 0$ gilt, mit w injektiv. Daher gibt es $x_0 \in \mathrm{U}$ mit $p(x_0) = a$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p'(x' - u(x_0)) &= p'(x') - p'(u(x_0)) \\ &= p'(x') - v(p(x_0)) \\ &= p'(x') - v(a) = 0. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass es ein $y' \in \mathrm{N}'$ mit $g'(y') = x' - u(x_0)$ existiert. Sei $y = n^{-1}(y')$. Wir betrachten $x = x_0 + g(y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_0) + u(g(y)) \\ &= u(x_0) + g'(n(y)) \\ &= u(x_0) + g'(y') \\ &= u(x_0) + x' - u(x_0) \\ &= x'. \end{aligned}$$

Also ist u surjektiv. $\square$

Korollar 2.2. *Sei*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "r"'] \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{M}' \arrow[r, "f'"] & \mathrm{N}' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{P}' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Moduln wobei jede Zeile eine exakte Sequenz links ist. Wir nehmen an, dass beide q und r Isomorphismen sind. Dann ist p ein Isomorphismus.*

Beweis. Man betrachtet das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "r"'] \\ \{0\} \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \mathrm{M}' \arrow[r, "f'"] & \mathrm{N}' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{P}' \end{tikzcd}$$

und anwendet das Fünflemma (2.1). $\square$

Korollar 2.3. *Sei*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \\ \mathrm{M}' \arrow[r, "f'"] & \mathrm{N}' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{P}' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Moduln wobei jede Zeile eine exakte Sequenz recht ist. Wir nehmen an, dass beide p und q Isomorphismen sind. Dann ist r ein Isomorphismus.*

Beweis. Man betrachtet das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

und anwendet das Fünflemma (2.1). □

Korollar 2.4. *Sei*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Moduln wobei jede Zeile eine kurze exakte Sequenz ist. Wir nehmen an, dass beide p und r Isomorphismen sind. Dann ist q ein Isomorphismus.*

Beweis. Man betrachtet das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \arrow[d] \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

und anwendet das Fünflemma (2.1). □

Satz 2.5 (Schlangenlemma)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Moduln wobei die zwei Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Dann gibt es eine kanonische exakte Sequenz der folgenden Form*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \ker(p) \arrow[r, "\bar{f}"] & \ker(q) \arrow[r, "\bar{g}"] & \ker(r) \arrow[dll, "\partial"', rounded corners] & \\ & \operatorname{coker}(p) \arrow[r, "\bar{f}'"] & \operatorname{coker}(q) \arrow[r, "\bar{g}'"] & \operatorname{coker}(r) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

wobei $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ bzw. $\bar{f}'$ bzw. $\bar{g}'$ die Abbildung induziert von f bzw. g bzw. f' bzw. g'. Die Abbildung ∂ heißt den Verbindungshomomorphismus.

Beweis. Erste Teil –. Nun werden wir zeigen, dass es eine kanonische exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow \ker(p) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(q) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(r)$$

gibt.

Die Abbildung $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ ist die Einschränkung von f bzw. von g. Insbesondere ist $\bar{f}$ injektiv da f diese Eigenschaft hat. Die Gleichung $\bar{f} \circ \bar{g} = 0$ ist klar auch.

Sei $y \in \ker(q)$ mit $\bar{g}(y) = 0$. Dann ist $y \in N$ mit $g(y) = 0$. Daher gibt es ein Element $x \in M$ mit $f(x) = y$. Es ist $x \in \ker(p)$ denn

$$f'(p(x)) = q(f(x)) = q(y) = 0$$

gilt und f' injektiv ist.

Zweite Teil –. Jetzt werden wir beweisen, dass

$$\operatorname{coker}(p) \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{coker}(q) \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker}(r) \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz recht ist.

Die Abbildung $\bar{f}'$ sendet die Restklasse einem Element x' von M' zur Restklasse von $f'(x')$. Das ist wohldefiniert und es bestimmt f' da $f(\operatorname{im}(p)) \subset \operatorname{im}(q)$, nach der universellen Eigenschaft des Quotients. Analog sendet die Abbildung $\bar{g}'$ die Restklasse einem Element y' von N' zur Restklasse von $g'(y')$. Insbesondere ist $\bar{g}'$ surjektive da g' diese Eigenschaft hat. Die Gleichung $\bar{f}' \circ \bar{g}' = 0$ ist klar.

Sei $y' \in N'$ mit $g'(y') \in \operatorname{im}(r)$ (das heißt die Restklasse von y' modulo $\operatorname{im}(q)$ liegt in $\ker(\bar{g}')$). Wir suchen ein Element $x' \in M'$ mit $f'(x') - y' \in \operatorname{im}(q)$. Sei $z \in P$ mit $r(z) = g'(y')$. Da g surjektive ist gibt es $y \in N$ mit $g(y) = z$. Es ist

$$\begin{aligned} g'(y' - q(y)) &= g'(y') - g'(q(y)) \\ &= g'(y') - r(g(y)) \\ &= g'(y') - r(z) \\ &= g'(y') - g'(y') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher gibt es $x' \in M'$ mit $f'(x') = y' - q(y)$. Also gilt $f'(x') - y' = q(-y) \in \operatorname{im}(q)$.

Dritte Teil –. Konstruktion von $\partial : \ker(r) \longrightarrow \operatorname{coker}(p)$.

Sei $z \in P$ mit $r(z) = 0$. Wir wählen $y_z \in N$ mit $g(y_z) = z$. Es ist

$$q(y_z) \in \operatorname{im}(f') = \ker(g')$$

denn

$$g'(q(y_z)) = r(g(y_z)) = r(z) = 0$$

gilt. Wir wählen $x'_z \in M'$ mit $f'(x'_z) = q(y_z)$ und definieren $\partial(z)$ als die Restklasse von x'_z modulo $\operatorname{im}(p)$. Wir sagen, dass $\partial(z)$ nicht von Auswahlen abhängt denn: Seien, für $i \in \{1,2\}$, $y_i \in N$ mit

$g(y_i) = z$ und seien $x'_i \in M'$ mit $f'(x'_i) = q(y_i)$, so gilt $x'_1 - x'_2 \in \mathrm{im}(p)$. Wir beweisen es wie folgt. Es ist

$$y_1 - y_2 \in \mathrm{im}(f) = \ker(g)$$

denn $g(y_1 - y_2) = z - z = 0$. Daher gibt es $x \in M$ mit $f(x) = y_1 - y_2$. Also gilt

$$\begin{aligned} f'(x'_1 - x'_2) &= f'(x'_1) - f'(x'_2) \\ &= q(y_1) - q(y_2) \\ &= q(y_1 - y_2) \\ &= q(f(x)) \\ &= f'(p(x)). \end{aligned}$$

Da f' injektiv ist folgt es, dass $x'_1 - x'_2 = p(x) \in \mathrm{im}(p)$ gilt.[1] Die Abbildung ∂ ist jetzt wohldefiniert. Sie ist R-linear denn:

- Für dede $z_i \in \ker(r)$ mit $i = 1, 2$ haben wir

$$g(y_{z_1} + y_{z_2}) = z_1 + z_2 \quad \text{und} \quad f'(x'_{z_1} + x'_{z_2}) = q(y_{z_1} + y_{z_2}).$$

- Für $z \in \ker(r)$ und $\lambda \in R$ haben wir

$$g(\lambda \cdot y_z) = g(\lambda \cdot z) \quad \text{und} \quad f'(\lambda \cdot x'_z) = q(\lambda \cdot y_z).$$

Vierte Teil –. Wir werden endlich zeigen, dass das Diagramm

$$\ker(q) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(r) \xrightarrow{\partial} \mathrm{coker}(p) \xrightarrow{\bar{f}'} \mathrm{coker}(q)$$

eine exakte Sequenz ist.

Für $y \in N$ mit $q(y) = 0$ ist $\partial(g(y))$ die Restklasse von x' mit $f'(x') = q(y) = 0$. Daher ist $x' = 0$ da f' injektiv ist. Also ist $\partial \circ \bar{g} = 0$. Sei $z \in \ker(r)$ mit $\partial(z) = 0$. Dann ist $z = g(y_z)$ mit $q(y_z) = f'(x'_z) = 0$ und $x'_z \in \mathrm{im}(p)$. Sei $x \in M$ mit $p(x) = x'_z$. Es ist

$$q(y_z) = f'(p(x)) = q(f(x)).$$

Dann ist $y = y_z - f(x) \in \ker(q)$ und

$$g(y) = g(y_z) - g(f(x)) = z - 0 = z.$$

Also ist $z \in \mathrm{im}(\bar{g})$.

Sei $z \in \ker(r)$. Nach Definition ist $\bar{f}'(\partial(z))$ die Restklasse von $q(y_z)$ modulo $\mathrm{im}(q)$. Daher gilt $\partial \circ \bar{f}' = 0$. Sei $x' \in M'$ mit $f'(x') \in \mathrm{im}(q)$. Wir wählen $y \in N$ mit $q(y) = f'(x')$. Es ist

$$r(g(y)) = g'(q(y)) = g'(f'(x)) = 0.$$

[1] Es folgt insbesondere aus dies, dass, um die Abbildung ∂ zu definieren, der Auswahlaxiom nicht nötig ist. (Option-Aufgabe)

Daher ist $g(y) \in \ker(r)$ und, nach Konstruktion, ist $\partial(g(y))$ die Restklasse von x' modulo $\operatorname{im}(p)$. □

Satz 2.6 (Schlangenlemma, Variante)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Moduln wobei die zwei Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Dann gibt es eine kanonische exakte Sequenz der folgenden Form*

$$\begin{tikzcd} \ker(p) \arrow[r, "\bar{f}"] & \ker(q) \arrow[r, "\bar{g}"] & \ker(r) \arrow[dll, "\partial"] \\ \operatorname{coker}(p) \arrow[r, "\bar{f}'"] & \operatorname{coker}(q) \arrow[r, "\bar{g}'"] & \operatorname{coker}(r) \end{tikzcd}$$

wobei $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ bzw. $\bar{f}'$ bzw. $\bar{g}'$ die Abbildung indutiert von f bzw. g bzw. f' bzw. g'.

Beweis. Dies folgt genauso wie in Satz 2.5, wobei nicht benötigt wird, dass f injektiv und g' surjektiv ist. □

Aufgabe 2.7 (Neunerlemma)**.** Sei

$$\begin{tikzcd} & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\ \{0\} \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "q'"'] & P' \arrow[r] \arrow[d, "r'"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & N'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\ & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \end{tikzcd}$$

Ein kommutatives Diagramm von R-Moduln. Wir nehmen an, dass die Reihen ebenso wie die mittel Zeile kurze exakte Sequenzen sind. Mit dem Schlangenlemma zeigen Sie, dass die erste Zeile genau eine kurze exakte Sequenz ist, wenn die dritte Zeile eine kurze exakte Sequenz ist.

Aufgabe 2.8. Sei

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[d, "r"'] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & P' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln wobei beide Zeilen exakt Sequenzen sind. Wir nehmen an, dass beide p und g surjektiv sind. Seien $y' \in N'$ und $z \in P$ mit $r(z) = g'(y')$. Zeigen Sie, dass es ein Element $y \in N$ mit $q(y) = y'$ und $g(y) = z$ gibt.

Kapitel 3

Lokalisierung von Ringe

Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 3.1. Eine Teimenge $S \subset A$ heißt *multiplikativ* (oder *multiplikativ abgeschlossen*), wenn $1 \in S$ und wenn mit a und b in S auch $a \cdot b$ in S liegt.

Beispiel 3.2. Für jedes $f \in A$ ist die Menge

$$\left\{ f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

multiplikativ.

Beispiel 3.3. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Ideal. Nach Definition ist die Menge $S_\mathfrak{p} = A - \mathfrak{p}$ genau dann multiplikativ, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

Beispiel 3.4. Ist A ein Integritätsring, so ist $A - \{0\}$ multiplikativ (da $A - \{0\}$ ein Primideal ist).

Beispiel 3.5. Die Menge A ist multiplikativ.

Beispiel 3.6. Die Menge $\{a \in A \mid a \text{ invertierbar}\}$ ist multiplikativ.

Beispiel 3.7. Ist $\varphi : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus (mit B kommutativ) und ist $T \subset B$ multiplikativ, so ist $\varphi^{-1}(T) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in T\}$ eine multiplikative Teilmenge von A.

3.8. Sei $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge. Wir betrachten die Relation $\sim$ auf $A \times S$:

$$(a,s) \sim (a',s') \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert ein } t \in S \text{ mit } t \cdot s' \cdot a = t \cdot s \cdot a'.$$

Es ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation (Aufgabe). Die Äquivalenzklasse von (a,s) bezüglich $\sim$ ist geschrieben $\frac{a}{s}$. Die Menge $(A \times S)/\sim$ von Äquivalenzklassen wird mit $S^{-1}A$ oder mit $A[S^{-1}]$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} \ell : A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\longmapsto \ell(a) = \frac{a}{1} \end{aligned}$$

die kanonische Projektion.

Satz 3.9. *Es gibt genau eine Struktur von Ring auf* $S^{-1}A$ *mit* $\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}$ *für alle* $a \in A$ *und* $s \in S$, *so dass die kanonische Abbildung von* A *nach* $S^{-1}A$ *ein Ringhomomorphismus ist. Außerdem gelten die folgende Eigenschaften:*

(i) $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{t \cdot a + s \cdot b}{s \cdot t}$ *für alle* $a, b \in A$ *und* $s, t \in S$;

(ii) $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a \cdot b}{s \cdot t}$ *für alle* $a, b \in A$ *und* $s, t \in S$;

(iii) *für jedes* $s \in S$ *ist* $\frac{s}{1}$ *invertierbar mit* $\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{s}$.

Zuletzt gilt die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ *mit* $\varphi(s)$ *invertierbar in* B *für alle* $s \in S$ *gibt es genau einen Ringhomomorphismus* $\psi : S^{-1}A \longrightarrow B$ *mit* $\psi\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi(a)$ *für alle* $a \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\ell"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

Beweis als Aufgabe. □

Definition 3.10. Der Ring $S^{-1}A$ oben heißt die *Lokalisierung von* A *nach* S.

Beispiel 3.11. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so setze $A_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$ die *Lokalisierung am* $\mathfrak{p}$.

Beispiel 3.12. Ist A ein Integritätsring und $S = A - \{0\}$, so ist $K = (A - \{0\})^{-1}A$ der *Quotientkörper* von A (also der Körper von Brüche in A).

Beispiel 3.13. Falls $0 \in S$ erhalten wir $S^{-1}A \cong \{0\}$ da $0 = \ell(0) = \frac{0}{1}$ invertierbar in $S^{-1}A$ ist.

Notiz 3.14. Die kanonische Abbildung $a \longmapsto \frac{a}{1}$ ist nicht immer injektiv.

Satz 3.15. *Die kanonische Abbildung* $A \longrightarrow S^{-1}A$ *ist genau dann injektiv, wenn* S *keine Nullteiler enthält.*

Korollar 3.16. *Ist* A *ein Integritäts ring, so ist die kanonische Abbildung* $A \longrightarrow S^{-1}A$ *injektiv.*

Beweis von Satz 3.15. Sei $a \in A$ mit $\frac{a}{1}$ null$= \frac{0}{1}$. Dann gibt es $s \in S$ mit $s \cdot a = s \cdot 1 \cdot a = s \cdot 1 \cdot 0 = 0$. Falls s kein Nullteiler ist soll $a = 0$ werden. Umgekehrt, ist $s \in S$ ein Nullteiler, so existiert $a \in A$ nicht null mit $s \cdot a = 0$. Also ist $\frac{a}{1} = 0$ mit $a \neq 0$. □

Satz 3.17 (Funktorialität der Lokalisierung)**.** *Sei* $\varphi : A \longrightarrow B$ *ein Ringhomomorphismus und seien* $S \subset A$ *und* $T \subset B$ *multiplikative Teilmengen mit* $\varphi(S) \subset T$. *Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus* $\psi : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}B$ *mit* $\psi\left(\frac{a}{1}\right) = \left(\frac{\varphi(a)}{1}\right)$ *für alle* $a \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ S^{-1}A \arrow[r, dotted, "\psi"] & T^{-1}B \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir anwenden die universelle Eigenschaft von Satz 3.9 zum Ringhomomorphismus

$$A \longrightarrow T^{-1}B$$

definiert durch $a \longmapsto \frac{\varphi(a)}{1}$. □

Aufgabe 3.18. Sei $f \in \mathrm{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{A}[f^{-1}] \cong \mathrm{A}[\mathrm{X}]/(f \cdot \mathrm{X} - 1)$ gilt, wobei $\mathrm{A}[f^{-1}] = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ mit S die multiplikative Teilmenge von Beispiel 3.2, und $(f \cdot \mathrm{X} - 1)$ das Hauptideal erzeugt vom Polynom $f \cdot \mathrm{X} - 1$.

Satz 3.19. *Sei $\mathrm{S} \subset \mathrm{A}$ eine multiplikative Teilmenge und sei $\ell : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ die kanonische Abbildung.*

1. *Sei $\mathfrak{P} \subset \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ ein Primideal. Es ist $\mathfrak{p} = \ell^{-1}(\mathfrak{P})$ ein Primideal mit $\mathrm{S} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$.*
2. *Seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \subset \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ zwei Primideale. Dann ist $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ genau dann, wenn $\ell^{-1}(\mathfrak{P}) \subset \ell^{-1}(\mathfrak{Q})$ gilt.*
3. *Sei $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap \mathrm{S} = \varnothing$. Dann gibt es genau ein Primideal $\mathfrak{P} \subset \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ mit $\mathfrak{p} = \ell^{-1}(\mathfrak{P})$. Tatsächlich ist*
$$\mathfrak{P} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\ s \in \mathrm{S} \right\}.$$

Beweis. Zu 1 –. Es ist $\mathfrak{p}$ prim denn: im allgemeiner ist das Urbild von einem Primideal durch einem beliebigen Ringhomomorphismus ein Primideal. Kein invertierbares Element von $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ liegt in $\mathfrak{P}$ da $\mathfrak{P} \neq \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. Insbesondere gilt für alle $s \in \mathrm{S}$
$$\ell(s) = \frac{s}{1} \notin \mathfrak{P}.$$
Das heißt genau, dass $\mathrm{S} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ ist.
Zu 2 –. Die Richtung
$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q} \Rightarrow \ell^{-1}(\mathfrak{P}) \subset \ell^{-1}(\mathfrak{Q})$$
ist einfach. Umgekehrt, sei $\ell^{-1}(\mathfrak{P}) \subset \ell^{-1}(\mathfrak{Q})$ und seien $a \in \mathrm{A}$ und $s \in \mathrm{S}$ mit $\frac{a}{s} \in \mathfrak{P}$. Dann ist $\frac{s \cdot a}{1} \in \mathfrak{P}$. Also gilt $s \cdot a \in \ell^{-1}(\mathfrak{P})$. Da $\ell^{-1}(\mathfrak{P})$ prim ist, das heißt, dass $a \in \ell^{-1}(\mathfrak{P})$ oder $s \in \ell^{-1}(\mathfrak{P})$ gilt. Aber $\mathrm{S} \cap \ell^{-1}(\mathfrak{P}) = \varnothing$ ist. Daher ist $a \in \ell^{-1}(\mathfrak{P}) \subset \ell^{-1}(\mathfrak{Q})$. Äquivalent ist $\frac{a}{1} \in \mathfrak{Q}$ und daher $\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1} \in \mathfrak{Q}$ gilt.
Zu 3 –. Es ist genug zu zeigen, dass
$$\mathfrak{P} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\ s \in \mathrm{S} \right\}$$
ein Primideal mit $\ell^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$ ist (die Eindeutigkeit folgt aus der 2. Aussage). Es ist einfach $\mathfrak{P}$ ein Ideal. Keine Einheit von $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ ist in $\mathfrak{P}$ denn: ist $1 = \frac{1}{1} \in \mathfrak{P}$, so ist $1 \in \mathfrak{p}$ und das ist eine Widerspruch. Ist
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \mathfrak{P}$$
mit $a, b \in \mathrm{A}$ und $s, t \in \mathrm{S}$, so gilt $a \cdot b \in \mathfrak{p}$. Also gilt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{b}$ und daher $\frac{a}{s} \in \mathfrak{P}$ oder $\frac{b}{t} \in \mathfrak{P}$. □

Aufgabe 3.20. Seien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \mathrm{A}$ Primideale. Zeigen Sie dass $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ isomorph zur Lokalisierung von $\mathrm{A}_\mathfrak{q}$ am Primideal $\mathfrak{p}\mathrm{A}_\mathfrak{q} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\ s \notin \mathfrak{q} \right\}$ ist.

Aufgabe 3.21. Sei $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass das Quotient $\mathrm{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ das Quotientkörper vom Integritätsring $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ ist.

Definition 3.22. Ein Ring R ist *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal enthält.

Beispiel 3.23. Jeder Körper K ist lokal da $\{0\}$ das eindeutige maximale Ideal ist.

Satz 3.24. *Sei* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal. Dann ist der Ring* $A_\mathfrak{p}$, *die Lokalisierung am* $\mathfrak{p}$ (3.11), *ein lokaler Ring. Das maximale Ideal von* $A_\mathfrak{p}$ *ist*

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\ s \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A_\mathfrak{p}$ nach der 3. Aussage von Satz 3.19.
Nach Satz 3.19 gibt es eine Bijektion zwischen die Menge von Primideale $\mathfrak{Q} \subset A_\mathfrak{p}$ und die Menge von Primideale $\mathfrak{q} \subset A$ mit $\mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$. Wir bemerken, dass

$$\mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}.$$

Nach der 2. Aussage von 3.19 ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ das größte Element der Menge aller Primideale von $A_\mathfrak{p}$ bezüglich die Inklusion. Da jedes maximale Ideal prim ist, ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ das eindeutige maximale Ideal von $A_\mathfrak{p}$. □

Satz 3.25. *Sei* R *ein kommutativer Ring. Jedes Ideal* $\mathfrak{a} \subsetneq R$ *ist in ein maximales Ideal enthält.*

Beweis. Sei E die Menge von Ideale $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{I}$, Es ist $E \neq \varnothing$ da $\mathfrak{a} \in E$. Sei M eine total geordnete nicht-leere Teilmenge von E. Sei

$$\mathfrak{I} = \cup M = \{x \in R \mid \text{es gibt } \mathfrak{b} \in M \text{ mit } x \in \mathfrak{b}\}.$$

Man prüft einfach, dass $\mathfrak{I}$ ein Ideal ist und es ist klar, dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{I}$ gilt. Aus dem zornschen Lemma folgt es, dass E ein maximales Element bezüglich die Inklusion hat. □

Korollar 3.26. *Sei* R *ein kommutativer Ring. Für jedes Element* x *sind die folgende Aussagen Äquivalent.*

(i) Es ist $x \notin R^\times$ *(also ist* x *keine Einheit in* R*).*

(ii) Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ *in* R *mit* $(x) \subset \mathfrak{m}$.

(iii) Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ *in* R *mit* $x \in \mathfrak{m}$.

Beweis. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) ist einfach. Es ist

$$x \notin R^\times \quad \Leftrightarrow \quad (x) \subsetneq R.$$

Aus Satz 3.25 folgt dann, dass (i)⇔(ii) gilt. □

Satz 3.27. *Seien* R *ein kommutativer Ring und* $\mathfrak{m} \subset R$ *ein maximales Ideal. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Der ring R *ist lokal.*

(ii) Für alle $x \in \mathrm{R}$ *ist* $x \in \mathfrak{m}$ *oder* $x \in \mathrm{R}^\times$.

Beweis. Aus Korollar 3.26 folgt (i)⇒(ii). Umgekehrt, gilt Aussage (ii) und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $x \notin \mathrm{R}^\times$ für jedes $x \in \mathfrak{p}$. Daher ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Das heißt, dass $\mathfrak{m}$ das eindeutige maximale Ideal ist. □

Notiz 3.28. Ist R ein lokaler Ring, so ist $\mathrm{R} - \mathrm{R}^\times$ das maximale Ideal.

Aufgabe 3.29 (Funktionskeime)**.** Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit (z.B. $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$ geoffnet) und sei $x \in \mathrm{X}$. Für jede offene Umgebung $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ von x ist $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ der Ring von differenzierbare Funktionen auf X. Wir betrachten die Quotientmenge $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x}$ von paare der Form (U, f) mit $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ eine offene Umgebung von x, und $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$, bezüglich die folgende Äquivalenzrelation:

$$(\mathrm{U}, f) \sim (\mathrm{V}, g) \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine offene Umgebung } x \in \mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \text{ mit } f_{|\mathrm{W}} = g_{|\mathrm{W}}.$$

Ein Element von $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x}$ heißt *Funktionskeim am* x. Ist $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion definiert auf einer Umgebung von x, so bezeichnen wir f_x den entsprechende Funktionskeim. Es gibt genau eine Struktur von Ring auf $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x}$, so dass für jede Umgebung U die Abbildung $f \longmapsto f_x$ ein Ringhomomorphismus von $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ nach $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x}$ ist. Es gibt auch ein wohldefinierter Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f_x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Dieser Ringhomomorphismus ist einfach surjektiv (betrachtend konstante Funktionnen). Daher ist

$$\mathfrak{m} = \{f_x \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x} \mid f(x) = 0\}$$

ein maximales Ideal.

1. Sei $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ eine offene Umgebung und sei $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ mit $f(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $x \in \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ mit $\frac{1}{f_{|\mathrm{V}}} \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})$ gibt (wobei die Funktion $\frac{1}{f_{|\mathrm{V}}}$ ist definiert durch $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ für $x \in \mathrm{V}$).
2. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{X},x}$ lokal ist.

Aufgabe 3.30. Sei $x \in \mathrm{R}$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Für alle $y \in \mathrm{R}$ ist $1 + x \cdot y$ invertierbar.

(ii) Für jedes maximal Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathrm{R}$ gilt $x \in \mathfrak{m}$.

Kapitel 4

Lokalisierung von Moduln

Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

4.1. Sei $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge. Für jeder A-Modul M betrachten wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M \times S$ definiert durch:

$$(x,s) \sim (x',s') \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert ein } t \in S \text{ mit } t \cdot s' \cdot x = t \cdot s \cdot x'.$$

Die Äquivalenzklasse von (x,s) bezüglich $\sim$ ist geschrieben $\frac{x}{s}$. Die Menge $(M \times S)/\sim$ von Äquivalenzklassen wird mit $S^{-1}M$ oder mit $M[S^{-1}]$ bezeichnet.

Satz 4.2. *Es gibt genau eine Struktur von* $S^{-1}A$*-Modul auf* $S^{-1}M$ *mit der folgenden Eigenschaften:*

(i) $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{t \cdot x + s \cdot y}{s \cdot t}$ *für alle* $x, y \in M$ *und* $s, t \in S$;

(ii) $\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{t} = \frac{a \cdot x}{s \cdot t}$ *für alle* $a \in A$, $x \in M$, *und* $s, t \in S$.

Insbesondere ist die Abbildung $x \longmapsto \frac{x}{1}$ *eine* A*-lineare Abbildung von* M *nach* $S^{-1}M$. *Zuletzt gilt die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem* A*-lineare Abbildung* $\varphi : M \longrightarrow N$ *nach einem* $S^{-1}A$*-Modul gibt es genau eine* $S^{-1}A$*-lineare Abbildung* $\psi : S^{-1}M \longrightarrow N$ *mit* $\psi\left(\frac{x}{1}\right) = \varphi(x)$ *für alle* $x \in M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis als Aufgabe. □

Definition 4.3. Der $S^{-1}A$-Modul heißt die *Lokalisierung von* M *nach* S.

Beispiel 4.4. Sei $f \in A$ und sei $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann bezeichnen wir $M[f^{-1}] = S^{-1}M$.

Aufgabe 4.5. Beschreiben Sie $M[f^{-1}]$ (bis auf Isomorphie) explizit als geeignetes Quotient der Summe $M^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{\mathbb{N}} M$.

Notiz 4.6. Sind M und N zwei $S^{-1}A$-Moduln, so ist jede A-linear Abbildung $f : M \longrightarrow N$ eine $S^{-1}A$-lineare Abbildung: für alle $a \in A$, $s \in S$, $x \in M$ gilt

$$\frac{a}{s} \cdot f(x) = f\left(\frac{a}{s} \cdot x\right)$$

da die Abbildung $y \longmapsto \frac{s}{1} \cdot y$ bijektiv ist und

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \cdot f(x) = \frac{a}{1} \cdot f(x) = f\Big(\frac{a}{1} \cdot x\Big) = f\Big(\frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \cdot x\Big) = \frac{s}{1} \cdot f\Big(\frac{a}{s} \cdot x\Big)$$

gilt. Also ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Aber, nach Definition gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Daher gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Das heißt, dass zu jeder $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linear Abbildung $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ gibt es genau eine $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linear Abbildung $g : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ mit $g\big(\frac{x}{1}\big) = f(x)$ für alle $x \in \mathrm{M}$. Es folgt aus dies, dass die Abbildung $x \longmapsto \frac{x}{1}$ an Isomorphismus von $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-Moduln $\mathrm{M} \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ ist (beide haben die gleiche universelle Eigenschaft).
Insbesondere, für alle A-Moduln M gilt

$$\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}) \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}.$$

Korollar 4.7. *Sei $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ eine A-lineare Abbildung. Es gibt eine genau eine $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-lineare Abbildung $\mathrm{S}^{-1}f : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$, die $\frac{x}{1}$ zu $\frac{f(x)}{1}$ für jedes $x \in \mathrm{M}$ sendet.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{N} \arrow[d] \\
\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \arrow[r, dotted, "\mathrm{S}^{-1}f"] & \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}
\end{tikzcd}$$

Satz 4.8. *Sei $\mathrm{S} \subset \mathrm{A}$ eine multiplikative Teilmenge. Ist*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P} \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exacte Sequenz von A-Moduln, so ist

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}f} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}g} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P} \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exacte Sequenz von $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-Moduln.

Beweis. Wir zeigen erst, dass $\mathrm{S}^{-1}f$ injektiv ist. Sei $x \in \mathrm{M}$ und sei $s \in \mathrm{S}$ mit

$$\frac{f(x)}{s} = (\mathrm{S}^{-1}f)\Big(\frac{x}{s}\Big) = 0.$$

Dann gibt es $t \in \mathrm{S}$ mit

$$0 = t \cdot s \cdot f(x) = f(t \cdot s \cdot x).$$

Da f injektiv ist folgt es, dass $t \cdot s \cdot x = 0$ ist. Also gilt $\frac{x}{s} = 0$ in $S^{-1}M$.
Es ist nun genug zu zeigen, dass das Diagramm

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz recht ist (als A-Modul oder als $S^{-1}A$-Modul, es ist egal). Nach Korollar 1.15 ist es äquivalent zu zeigen, dass, für jeden $S^{-1}A$-Modul V, das Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}P, V) \xrightarrow{(S^{-1}g)^*} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}N, V) \xrightarrow{(S^{-1}f)^*} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, V) \tag{4.8.1}$$

eine exakte Sequenz links ist. Aber, die universelle Eigenschaft der Lokalisierung von Moduln bedeutet, dass für jeden A-Modul U, die kanonische Abbildung $U \longrightarrow S^{-1}U$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}U, V) \cong \mathrm{Hom}_A(U, V)$$

für alle $S^{-1}A$-Moduln V induziert. Also ist das Diagramm (4.8.1) ein Teildiagramm von

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}P, V) & \xrightarrow{(S^{-1}g)^*} & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}N, V) & \xrightarrow{(S^{-1}f)^*} & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, V) \\ & \| \wr & & \| \wr & & \| \wr \\ \{0\} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(P, V) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_A(N, V) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_A(M, V). \end{array} \tag{4.8.2}$$

Schließlich, nach Korollar 1.15 ist die zweite Zeile des letzteres eine exakte Sequenz links. ☐

Korollar 4.9. *Sei* $S \subset A$ *eine Multiplikative Teilmenge. Ist*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln, so ist

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$$

eine exakte Sequenz.

Beweis als Aufgabe. ☐

Definition 4.10. Sei M ein A-Modul. Zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ erhalten wir ein $A_\mathfrak{p}$-Modul

$$M_\mathfrak{p} = (A - \mathfrak{p})^{-1}M$$

Satz 4.11. *Sei M ein A-Modul. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $M = \{0\}$.

(ii) $M_\mathfrak{p} = \{0\}$ *für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \subset A$.

(iii) $M_\mathfrak{p} = \{0\}$ *für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{p} \subset A$.

Beweis. Klar gilt (i)⇒(ii)⇒(iii). Es ist dann genug zu zeigen, dass (iii)⇒(i) gilt. Sei $x \in M$. Der *Annulator* von x

$$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid a \cdot x = 0\}$$

ist offenbar ein Ideal von A. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{p} \subset A$, wegen $M_\mathfrak{p} = \{0\}$ existiert ein $a \notin \mathfrak{p}$ mit $a \cdot x = 0$, also $a \in \mathrm{Ann}(x)$. Aber ist $x \neq 0$, so ist $\mathrm{Ann}(x) \neq A$. Nach Satz 3.25 existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{p}$ – Widerspruch. □

Korollar 4.12. *Sei $f : M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung. Es ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$, die induzierte $A_\mathfrak{p}$-lineare Abbildung $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$ bijektiv ist.*

Beweis. Wir haben die kanonische exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \longrightarrow \{0\}.$$

Für jedes $\mathfrak{p}$, erhalten wir nach Korollar 4.9 exakte Sequenzen der Form

$$\{0\} \longrightarrow \ker(f)_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{coker}(f)_\mathfrak{p} \longrightarrow \{0\}$$

und wegen $f_\mathfrak{p}$ ist bijektiv gilt:

$$\ker(f)_\mathfrak{p} = \{0\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{coker}(f)_\mathfrak{p} = \{0\}.$$

Nach Satz 4.11 gilt:

$$\ker(f) = \{0\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{coker}(f) = \{0\}.$$

Also ist f bijektiv. □

Aufgabe 4.13. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $M_\mathfrak{p} = \{0\}$. Zeigen Sie, dass es ein Element $f \in A - \mathfrak{p}$ mit $M[f^{-1}] = \{0\}$ existiert. Zeigen Sie, dass $M_\mathfrak{q} = \{0\}$ für alle Primideale $\mathfrak{q} \subset A$ mit $f \notin \mathfrak{q}$ ist.

4.14. Sei $\mathfrak{I} \subset A$ ein Ideal und sei M ein A-Modul. Wir definieren

$$\mathfrak{I}M = \{a \cdot x \mid a \in \mathfrak{I} \ x \in M\}.$$

Es ist ein Untermodul von M, und das Quotient $M/\mathfrak{I}M$ ist kanonisch ein $A/\mathfrak{I}$-Modul.

Satz 4.15 (Krull-Nakayama-Lemma). *Sei $\mathfrak{I} \subset A$ ein Ideal, welches in allen maximalen Idealen von A enthalten ist. Sei M ein A-Modul mit Untermodul $N \subset M$, so dass M/N endlich erzeugt ist. Gilt $M = \mathfrak{I}M + N$, so ist schon $M = N$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal bezüglich die Eigenschaft, dass $x_1, \ldots, x_n \in M$ existiert und die Restklassen $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ein Erzeugendensystem von $P = M/N$ bilden. Angenommen $n > 0$. Wegen $M = \mathfrak{I}M + N$ gilt $\mathfrak{I}P = P$. Also existiert $a \in \mathfrak{I}$ und $y \in P$ mit

$$\bar{x}_n = a \cdot y\,.$$

Es gibt $b_1, \ldots, b_n \in A$ mit

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \bar{x}_i\,.$$

Wir definieren $a_i = a \cdot b_i \in \mathfrak{I}$ und erhalten

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \bar{x}_i\,.$$

Es folgt

$$(1 - a_n) \cdot \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \bar{x}_i\,.$$

Es ist $1 - a_n \notin \mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ da $a_n \in \mathfrak{I} \subset \mathfrak{m}$ und $1 \notin \mathfrak{m}$ gilt. Daher ist $(1 - a_n) = A$ (nach Satz 3.25). Also ist $1 - a_n$ eine Einheit von A. Durch Multiplikation mit $(1 - a_n)^{-1}$ folgt, dass M schon von $\bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_{n-1}$ erzeugt wird – Widerspruch. Aslo ist $n = 0$ und $P = \{0\}$. Äquivalent ist $M = N$. □

Korollar 4.16. *Sei* A *ein lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$ *und* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Sind* $x_1, \ldots, x_n \in M$ *Elemente, deren Restklassen* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ *den Modul* $M/\mathfrak{m}M$ *erzeugen, so wird* M *von* $x_1, \ldots, x_n$ *erzeugt.*

Beweis. Anwendung von Satz 4.15 mit $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ und $N \subset M$ der von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugte Untermodul. □

Aufgabe 4.17. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sei $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ und sei $V(\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p}/(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})M_\mathfrak{p}$.

1. Zeigen Sie, dass $\kappa(\mathfrak{p})$ ein Körper und $V(\mathfrak{p})$ ein endlich erzeugter $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum sind.
2. Sei $n = \dim V(\mathfrak{p})$ (als $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum). Zeigen Sie, dass $M_\mathfrak{p}$ von n Elemente erzeugt ist.
3. Sei $n = \dim V(\mathfrak{p})$. Zeigen Sie, dass es ein Element $f \in A - \mathfrak{p}$ gibt, so dass $M[f^{-1}]$ von n Elemente als $A[f^{-1}]$-Modul erzeugt wird.

Aufgabe 4.18. Sei $\mathfrak{I} \subset A$ ein Ideal. Seien M ein endlich erzeugter A-Modul, und $N \subset M$ ein Untermodul. Wir nehmen an, dass $IM + N = M$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass $S = 1 + \mathfrak{I} = \{1 + a \mid a \in I\}$ ein Multiplikative Teilmenge von A ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $S^{-1}M$ endlich erzeugt als $S^{-1}A$-Modul ist.

(iii) Zeigen Sie, dass das Ideal $S^{-1}I \subset S^{-1}A$ in allen maximalen Idealen von $S^{-1}A$ enthalten ist.
Hinweis: zeigen Sie, dass für jedes $a \in S^{-1}I$ die Summe $1 + a$ invertierbar in $S^{-1}A$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $S^{-1}N = S^{-1}M$ gilt.

(v) Zeigen Sie, dass es ein Element $a \in I$ mit $(1 + a)M \subset N$ gibt.

Satz 4.19. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $f : M \longrightarrow M$ *ein surjektiver Endomorphismus. Dann ist* f *bijektiv.*

Beweis. Es ist M ein A[X]-Modul durch

$$p \cdot x = p(f)(x) = a_n \cdot f^n(x) + \cdots + a_0 \cdot x$$

wobei $p(X) = a_n \cdot X^n + \cdots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in A$. Außerdem gilt

$$\mathrm{im}(f) = IM$$

wobei $I = (X) \subset A[X]$ das Hauptideal erzeugt von X ist. Da f surjektiv ist erhalten wir $M = IM$. Nach Aufgabe 4.17 (mit $N = \{0\}$) existiert ein $p \in (X)$ mit $x + p \cdot x = 0$ für alle $x \in M$. Also ist $p = X \cdot q$ mit $q \in A[X]$. Sei

$$g : M \longrightarrow M$$

die A-lineare Abbildung definiert durch $g(x) = q \cdot x$. Für jedes $x \in M$ ist

$$0 = x + p \cdot x = x + g(f(x)) = x + f(g(x)).$$

Das heißt, dass f invertierbar mit Umkehrabbildung $f^{-1} = -g$ ist. □

Aufgabe 4.20. Seien $f, g : M \longrightarrow M$ zwei Endomorphismen einem endlich erzeugten A-Modul. Sei $\mathfrak{I} \subset A$ ein Ideal im Durchschnitt aller maximalen Ideale. Wir nehmen an, dass f surjektiv und $\mathrm{im}(g) \subset IM$ ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h = f + g : M \longrightarrow M$ bijektiv ist.

Kapitel 5

Noethersche Ringe

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 5.1. Der Ring R heißt *noethersch* (nach Emmy Noether), wenn jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ endlich erzeugt ist.

Satz 5.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) R *ist noethersch.*

(ii) Jede aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_n \subset \ldots$ *von Idealen wird stationär (das heißt es existiert* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_N$ *für alle* $n \geq N$*).*

(iii) Jede nichtleere Menge I *von Idealen von* R *besitzt ein maximales Element (bezüglich die Inklusion).*

Beweis. Zu (i)⇒(ii). Sei $\mathfrak{a} = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{a}_n$. Es ist ein Ideal (da endlich viele Elemente von $\mathfrak{a}$ liegen in einem $\mathfrak{a}_n$ für n groß genug). Ist $\mathfrak{a}$ erzeugt von $a_1, \ldots, a_k$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{a}_N$. Für $n \geq N$ erhalten wir

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_N \subset \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}\,.$$

Daher gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_n$.
Zu (ii)⇒(iii). Angenommen hat I kein maximales Element. So existiert eine aufsteigende Kette

$$\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subset \mathfrak{a}_n \subsetneq \ldots$$

Zu (iii)⇒(i). Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R und I die Menge aller in $\mathfrak{a}$ enthalten endlich erzeugten Ideale. Wegen $\{0\} \in I$ ist I nichtleer. Sei $\mathfrak{b}$ ein maximales Element von I. Es ist nach Definition $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Umgekehrt, ist $a \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{b}' = R \cdot a + \mathfrak{b}$ endlich erzeugt mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{a}$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$. Insbesondere ist $a \in \mathfrak{b}$. Also ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \in I$. □

Beispiel 5.3. Körper sind noethersch.

Beispiel 5.4. Hauptidealringe sind noethersch. Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ noethersch.

Satz 5.5 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist* R *noethersch, so ist auch* R[X] *noethersch.*

Beweis. Angenommen ist $\mathfrak{a} \subset R[X]$ ein nicht endlich erzeugtes Ideal. Wir definieren eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subset \mathfrak{a}_n \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}$ und eine Folge von Polynome

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, \ldots$$

induktiv über n wie folgt. Für $n = 0$ betrachten wir $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$. Ist $n \geq 0$ und haben wir schon das Ideal $\mathfrak{a}_n \subsetneq \mathfrak{a}$, so betrachten wir

$$d_{n+1} = \min\{\deg(p) \mid p \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_n\} \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Dann wählen wir $p_{n+1} \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_n$ mit $\deg(p_{n+1}) = d_{n+1}$. Wir definieren

$$\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_n + R[X] \cdot p_{n+1} = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}).$$

Für $n > 0$, sei $c_n \in R$ der Leitkoeffizient von p_n. Also ist

$$q_n = p_n - c_n \cdot X^{d_n} \in R[X], \qquad \deg(q_n) < d_n.$$

Sei

$$\mathfrak{b}_n = (c_1, \ldots, c_n) \subset R.$$

Es ist $c_{n+1} \notin \mathfrak{b}_n$ denn: wäre

$$c_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot c_i \quad \text{mit } \lambda_i \in R,$$

so läge das Polynom

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X^{d_{n+1}-d_i} \cdot p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X^{d_{n+1}-d_i} \cdot (q_i + c_i \cdot X^{d_i}) \\ &= q + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot X^{d_{n+1}-d_i} \cdot c_i \cdot X^{d_i} \quad \text{mit } \deg(q) < d_{n+1} \\ &= q + c_{n+1} \cdot X^{d_{n+1}} \end{aligned}$$

in $\mathfrak{a}_n$; daher würde

$$p_{n+1} - f = q_{n+1} - q \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_n \quad \text{mit } \deg(p_{n+1} - f) < d_{n+1}$$

im Widerspruch zur Wahl von p_{n+1}. Schließlich erhalten wir eine aufsteigende Kette von Idealen

$$\mathfrak{b}_1 \subsetneq \mathfrak{b}_2 \subsetneq \ldots \subset \mathfrak{b}_n \subsetneq \ldots \subset R.$$

Das heißt, dass R nicht noethersch ist. □

Korollar 5.6. *Ist* R *noethersch, so ist* $R[X_1, \ldots, X_n]$ *noethersch für alle* $n \geq 0$.

Beweis. Induktiv über n durch $R[X_1,\dots,X_n] \cong R[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$ für $n > 0$. □

Definition 5.7. Ein R-Modul M ist *noethersch*, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.

Notiz 5.8. Jeder noethersche R-Modul ist endlich erzeugt da er ein Untermodul selbst ist.

Aufgabe 5.9. Sei M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) M ist noethersch.

(ii) Jede aufsteigende Kette $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$ von Untermoduln von M wird stationär.

(iii) Jede nichtleere Menge I von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element.

Aufgabe 5.10. Sei

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln mit M und P endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass N endlich erzeugt ist.

Satz 5.11. *Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln der Form:*

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow \{0\}.$$

Der Modul N *ist genau dann noethersch, wenn beide* M *und* P *noethersch sind.*

Beweis. Angenommen ist N noethersch. Jeder Untermodul von M ist ein Untermodul von N (bis auf Isomorphie) und daher endlich erzeugt ist. Ist $Q \subset P$ ein Untermodul, sei V das Urbild von Q in N. Die surjektive Abbildung von N nach P induziert eine surjektive Abbildung von V nach Q. Da V endlich erzeugt ist so folgt, dass Q endlich erzeugt ist.
Umgekehrt, seien M und P noethersch. Wir betrachten eine beliebige Untermodul $V \subset N$. Dann ist $M \cap V$ endlich erzeugt. Die kanonische Abbildung $V/M\cap V \longrightarrow P$ ist injektiv. Also ist $V/M \cap V$ endlich erzeugt da er isomorph zu einem Untermodul des noethersches Modul P ist. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow V \cap M \longrightarrow V \longrightarrow V/V \cap M \longrightarrow \{0\}$$

mit beide $V \cap M$ und $V/V \cap M$ endlich erzeugt. Daher ist V endlich erzeugt. □

Satz 5.12. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) Der Ring R *ist noethersch.*

(ii) Jeder endlich erzeugte R*-Modul ist noethersch.*

Beweis. Die Richtung (ii)⇒(i) ist einfach. Angenommen ist R noethersch. Für jede $n \geq 0$ ist R^n noethersch denn: es ist war für $n \leq 1$ nach Definition, und für $n > 0$, es folgt aus der exakten Sequenzen der Form

$$\{0\} \longrightarrow R^{n-1} \longrightarrow R^n \longrightarrow R \longrightarrow \{0\},$$

nach Satz 5.11. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Die Wahl einem Erzeugendensystem induziert eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}.$$

Da R^n noethersch ist, so ist M noethersch, nach Satz 5.11. □

Aufgabe 5.13. Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, und sei M ein R-Modul.

(i) Sei $V \subset S^{-1}M$ ein Untermodul. Zeigen Sie, dass es ein Untermodul $N \subset M$ mit $S^{-1}N = V$ gibt.

(ii) Wir nehmen an, dass M endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, dass der $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}M$ endlich erzeugt ist.

(iii) Angenommen ist R noethersch. Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ noethersch ist.

Aufgabe 5.14. Sei R noethersch, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathfrak{a} \subset R[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass der Ring $R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ noethersch ist.

Aufgabe 5.15. Sei R ein kommutativer Ring mit multiplikativer Teilmenge $S \subset R$, und sei N sein R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass, für jeden R-Modul M, die Abbildung $f \longmapsto S^{-1}f$ eine $S^{-1}R$-lineare Abbildung

$$\alpha_{M,N} : S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

induziert.

(ii) Sei $Q \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$ eine exakte Sequenz recht von R-Moduln. Angenommen sind $\alpha_{P,N}$ und $\alpha_{Q,N}$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $\alpha_{M,N}$ bijektiv ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\alpha_{M,N}$ für jeden endlich erzeugte freie R-Modul M bijektiv ist.

(iv) Angenommen ist R noethersch und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass es eine exakte Sequenz recht der Form $Q \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$ mit beide P und Q endlich erzeugt und frei gibt. Zeigen Sie, dass $\alpha_{M,N}$ bijektiv ist.

(v) Geben Sie einen Beispiel von R-Modul M, so dass $\alpha_{M,N}$ nich bijektiv ist.

Aufgabe 5.16. Sei K ein Körper und sei $K(X, Y)$ der Quotientkörper von $K[X, Y]$. Wir betrachten der Unterring $R \subset K(X, Y)$ erzeugt von K und von der Menge

$$\left\{X, Y, \frac{X}{Y^2}, \frac{X}{Y^3}, \ldots, \frac{X}{Y^n}, \ldots\right\}.$$

Zeigen Sie, dass R kein noetherscher Ring ist.

Kapitel 6

Der Hilbertsche Nullstellensatz

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sind $f_1 \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ $(m, n \in \mathbb{N})$, so begründet der Hilbertsche Nullstellensatz eine genaue Korrespondenz zwischen die Menge aller maximalen Ideale des Quotientsring $K[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_m)$ und die Punkte von

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f_i = 0 \right\} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \;\middle|\; f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für alle } 1 \le i \le m \right\}.$$

Für den Beweis brauchen wir viele Vorbereitung.

6.1 Der Satz von Cayley-Hamilton

Es ist A ein kommutativer Ring mit eins.

Definition 6.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $U = (a_{i,j})_{i,j}$ ein $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in A. Wir definieren *das Determinant* von U als

$$\det(U) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

(wobei $\mathfrak{S}_n$ die Gruppe von Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ und $\varepsilon(\sigma)$ das Signum der Permutation σ ist).

Notiz 6.2. Es gibt eine kanonische Bijektion

$$\{(n \times m)\text{-Matrix mit Koeffizienten in A}\} \cong \{\text{Lineare Abbildungen } A^m \longrightarrow A^n\}.$$

Durch diese Korrespondenz ist das Produkt von Matrizen assoziiert zur Komposition von linearen Abbildungen.

Satz 6.3. *Die folgenden Eigenschaften gelten.*

(i) Seien U *und* V *zwei* $(n \times n)$*-Matrizen mit Koeffizienten in* A. *Dann gilt*

$$\det(U \cdot V) = \det(U) \cdot \det(V).$$

(ii) Sei U *eine* $(n \times n)$*-Matrix mit Koeffizienten in* A. *Dann gilt* $\det(U^T) = \det(U)$ *wobei* $U^T = (a_{j,i})_{i,j}$ *die transponierte Matrix zu* U *ist.*

Beweis. Ist A ein Körper, so ist es wohlbekannt. Ist A ein Integritätsring, sei $K = (A - \{0\})^{-1}A$ der Quotientkörper. Da die Menge von $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in A eine Teilmenge der Menge von $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K gelten dann Aussäge (i) in (ii). Sei nun A ein beliebiger Ring. Sei

$$B = \mathbb{Z}[Y_{i,j}, Z_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]$$

das Polynomring mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ mit $2 \cdot n^2$ Variablen. Falls $U = (a_{i,j})_{i,j}$ und $V = (b_{i,j})_{i,j}$ zwei $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in A sind, so gibt es genau ein Ringhomomorphismus

$$\varphi : B \longrightarrow A$$

mit $\varphi(Y_{i,j}) = a_{i,j}$ und $\varphi(Z_{i,j}) = b_{i,j}$ für alle i, j. Es ist B ein Integritätsring. Daher, mit der $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in B definierte durch $M = (Y_{i,j})_{i,j}$ und $N = (Z_{i,j})_{i,j}$ erhalten wir

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N) \quad \text{und} \quad \det(M^T) = \det(M).$$

Außerdem gelten die folgenden Relationen (nachrechnen):

$$\begin{aligned} \varphi(\det(M)) &= \det(U) \\ \varphi(\det(N)) &= \det(V) \\ \varphi(\det(M \cdot N)) &= \det(U \cdot V) \\ \varphi(\det(M^T)) &= \det(U^T). \end{aligned}$$

Daher gilt $\det(U \cdot V) = \det(U) \cdot \det(V)$ und $\det(U^T) = \det(U)$. □

Satz 6.4 (Cayley-Hamilton). *Sei* $U = (a_{i,j})_{i,j}$ *eine* $(n \times n)$*-Matrix mit Koeffizienten in* A. *Sei* $\chi_U = \det(X \cdot I_n - U) \in A[X]$ *das charakteristische Polynom von* U. *Es ist*

$$\chi_U = X^n - \mathrm{Tr}(U) \cdot X^{n-1} + \cdots + \det(U)$$

wobei $\mathrm{Tr}(U) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ *die Spur von* U *ist. Insbesondere ist* χ_A *ein normiertes Polynom. Außerdem gilt* $\chi_U(U) = 0$.

Beweis. Ist A ein Körper, so ist es wohlbekannt. Ist A ein Integritätsring, so ist es ein Unterring seines Quotientkörper, und daher ist es bekannt auch. Sei A ein beliebiger Ring. Wir betrachten der Polynomring mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und mit n^2 Variablen

$$B = \mathbb{Z}[Y_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n].$$

Sei $\varphi : B \longrightarrow A$ der Ringhomomorphismus bestimmt durch $\varphi(Y_{i,j}) = a_{i,j}$ für alle i, j. Es ist $M = (Y_{i,j})_{i,j}$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten im Integritätsring B. Daher gilt

$$\chi_M = X^n - \mathrm{Tr}(M) \cdot X^{n-1} + \cdots + \det(M)$$

und $\chi_M(M) = 0$. Wir bezeichnen noch $\varphi : B[X] \longrightarrow A[X]$ der Ringhomomorphismus induziert von $\varphi : B \longrightarrow A$. Es gilt:

$$\varphi(\det(X \cdot I_n - M)) = \det(X \cdot I_n - U)$$
$$\varphi(\det(M)) = \det(U)$$
$$\varphi(\mathrm{Tr}(M)) = \mathrm{Tr}(U)$$
$$\varphi(\chi_M) = \chi_U .$$

Daher ist $\chi_U = X^n - \mathrm{Tr}(U) \cdot X^{n-1} + \cdots + \det(U)$ und $\chi_U(U) = 0$. □

Korollar 6.5. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $f : M \longrightarrow M$ *ein Endomorphismus. Es existiert ein normiertes Polynom* $p \in A[X]$ *mit* $p(f) = 0$.

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von M. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von A^n. Es gibt genau eine lineare Abbildung $u : A^n \longrightarrow M$ mit $u(e_i) = v_i$ für alle i. Diese Abbildung ist surjektiv. Insbesondere, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es Elemente $w_i \in A^n$ mit $u(w_i) = f(v_i)$. Sei $g : A^n \longrightarrow A^n$ die A-lineare Abbildung bestimmt durch $g(e_i) = w_i$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & A^n \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Die Abbildung g ist die Multiplikation mit einer $(n \times n)$-Matrix U. Sei $p = \chi_U$ das charakteristische Polynom von U. Es ist p normiert mit $p(g) = 0$ (Cayley-Hamilton). Also ist $p(g)(y) = 0$ für alle $y \in A^n$. Sei $x \in M$. Es gibt $y \in A^n$ mit $u(y) = x$. Daher erhalten wir:

$$p(f)(x) = p(f)(u(y)) = u(p(g)(y)) = u(0) = 0 .$$

Also gilt $p(f) = 0$. □

6.2 Ganzheit

Sei $\varphi : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, mit A und B kommutativ.[1] Sind $a \in A$ und $b \in B$, so schreiben wir $a \cdot b = b \cdot a = \varphi(a) \cdot b$.

Jedes Elemente x in B bestimmt genau ein A-Algebrenhomomorphismus

$$\psi : A[X] \longrightarrow B$$

mit $\psi(X) = x$. Explizit ist $\psi(p) = p(x)$ für jedes $p \in A[X]$. Das Bild von ψ wird der Unterring $A[x]$ erzeugt von A und x in B ernennt. Es ist

$$A[x] = \{\lambda_0 \cdot x^n + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x + \lambda_n \in B \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in A\}.$$

[1] Wir sagen auch, dass B eine A-*Algebra* ist.

Sind $x_1, \dots, x_n$ endlich viele Elemente von B (mit $n > 1$), so bezeichnen wir

$$A[x_1, \dots, x_n] = A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n].$$

Definition 6.6. Der Ringhomomorphismus wird als *endlich* bezeichnet, wenn B endlich erzeugt als A-Modul ist.

Definition 6.7. Ein Element $x \in B$ ist *ganz über* A (oder *ganz-algebraisch über* A), wenn es ein normiertes Polynom $p \in A[X]$

$$p(X) = X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n \,, \quad a_1, \dots, a_n \in A,$$

mit $p(x) = 0$ in B gibt.
Sind alle Elemente von B ganz über A, so sagen wir, dass B *ganz über* A ist, oder, dass der Ringhomomorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ *ganz* ist.

Satz 6.8. *Sei $x \in B$. Die folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) Das Element x ist ganz über A.

(ii) Der Unterring $A[x]$ erzeugt von A und x in B ist endlich erzeugt als A-Modul.

(iii) Es gibt ein Unterring C von B, der A und x enthält und, der endlich erzeugt als A-Modul ist.

Beweis. Zu (i)$\Rightarrow$(ii). Seien $a_1, \dots, a_n \in A$ und $p(X) = X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n$ mit $p(x) = 0$. Da p normiertes ist, zu jedem Polynom $f \in A[X]$ gibt es $(q, r) \in A[X]^2$ mit $\deg(r) < \deg(p)$ und $f = p \cdot q + r$ (Aufgabe). Dass heißt, dass die Menge $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ ein Erzeugendensystem von $A[x]$ als A-Modul ist.
Zu (ii)$\Rightarrow$(iii). Einfach.
Zu (iii)$\Rightarrow$(i). Sei $C \subset B$ ein Unterring mit $A \subset C$ und $x \in C$. Sei $f : C \longrightarrow C$ die Abbildung definiert durch $f(y) = x \cdot y$. Sie ist A-linear. Ist C endlich erzeugt als A-Modul, nach dem Korollar des Satzes von Cayley-Hamilton (6.5), so existiert ein normiertes Polynom $p \in A[X]$ mit $p(f) = 0$. Aber $p(f)(y) = p(x) \cdot y$ für alle $y \in C$. Also ist $p(x) = 0$. □

Korollar 6.9. *Ist $\varphi : A \longrightarrow B$ endlich, so ist B ganz über A.*

Beispiel 6.10. Seien $a_1, \dots, a_n \in A$ und $p(X) = X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n \in A[X]$. Die kanonische Abbildung $A \longrightarrow A[X]/(p)$ ist ein endlicher Ringhomomorphismus denn $A[X]/(p) = A[x]$ mit x die Resklasse von X modulo (p) und $p(x) = 0$ ist.

Satz 6.11. *Sind $\varphi : A \longrightarrow B$ und $\psi : B \longrightarrow C$ endliche Ringhomomorphismen, so ist $\psi \circ \varphi : A \longrightarrow C$ endlich.*

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul und sei $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ein Erzeugendensystem von C als B-Modul. Dann ist $\{v_i \cdot w_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ ein Erzeugendensystem von C als A-Modul (nachrechnen). □

Korollar 6.12. *Ist* $\mathrm{B} = \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $x_1, \ldots, x_n$ *endlich viele ganze Elemente über* A, *so ist* $\varphi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ *endlich. Insbesondere sind alle Elemente von* B *ganz über* A.

Beweis. Wir beweisen induktiv über n. Ist $n = 1$, so ist $\mathrm{A}[x_1]$ endlich über A. Ist $n > 0$, so sind $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ und $\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_{n-1}] \longrightarrow \mathrm{B}$ endlich. Daher ist $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ endlich, nach Satz 6.11. □

Korollar 6.13. *Die Menge von ganzen Elementen über* A *ist ein Unterring von* B.

Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{B}$ ganz über A. Dann ist die induzierte Abbildung $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}[x, y]$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Daher sind alle Elemente von $\mathrm{A}[x, y]$, insbesondere $x + y$ und $x \cdot y$, ganz über A. □

Korollar 6.14. *Sind* $\varphi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ *und* $\psi : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ *ganze Ringhomomorphismen, so ist* $\psi \circ \varphi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{C}$ *ganz.*

Beweis. Sei $y \in \mathrm{C}$. Da y ganz über B ist gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}$ mit

$$y^n + x_1 \cdot y^{n-1} + \cdots + x_{n-1} \cdot y + x_n = 0.$$

Also ist y ganz über $\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]$. Äquivalent ist der Ringhomomorphismus

$$\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n][y]$$

endlich, nach Satz 6.8. Da $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]$ endlich ist (Korollar 6.12), so folgt, dass $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n][y]$ endlich ist, nach Satz 6.11. Daher ist y ganz über A, nach Satz 6.8. □

Satz 6.15. *Es sei* B *ein Integritätsring und* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *ein Unterring mit* B *ganz über* A. *Es ist* B *ein Körper genau dann, wenn* A *ein Körper ist.*

Beweis. Angenommen ist B ein Körper. Sie $x \in \mathrm{A}$ mit $x \neq 0$. Es ist $y = x^{-1} \in \mathrm{B}$ ganz über A. Also existiert Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ mit

$$y^n + a_1 \cdot y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot y + a_n = x^{-n} + a_1 \cdot x^{-n+1} + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{-1} + a_n = 0.$$

Daher gilt

$$1 + x \cdot \left(a_1 + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + a_n \cdot x^{n-1}\right) = x^n \cdot \left(x^{-n} + a_1 \cdot x^{-n+1} + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{-1} + a_n\right) = 0.$$

Das heißt, dass x invertierbar in A mit $x^{-1} = -(a_1 + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + a_n \cdot x^{n-1})$ ist. Umgekehrt, sei A ein Körper und sei $y \in B$ mit $y \neq 0$. Ist $y \in A$, so ist $y^{-1} \in A \subset B$. Angenommen ist $y \notin A$. Es gibt Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$y^n + a_1 \cdot y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot y + a_n = 0.$$

Es ist $n > 1$ da $y \notin A$. Es ist möglich zu wählen $a_n \neq 0$: sonst, da B ein Integritätring ist, gilt

$$y^{n-1} + a_1 \cdot y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

und so weiter. Dann ist y invertierbar in B mit $y^{-1} = a_n^{-1} \cdot \left(-y^{n-1} - a_1 \cdot y^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\right)$. □

Aufgabe 6.16. Sei R ein kommutativer Ring. Seien $\varphi_i : R \longrightarrow R_i$, $1 \leq i \leq n$, ganze Ringhomomorphismen (mit jeder R_i kommutativ). Zeigen Sie, dass der induzierte kanonische Ringhomomorphismus $\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^n R_i$ ganz ist.

Aufgabe 6.17. Sei G eine endliche Gruppe und sei ein kommutativer Ring A. Wir betrachten eine Operation von G auf dem Ring A:

$$\begin{aligned} G \times A &\longrightarrow A \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

Also operiert G auf der Menge A so, dass für jedes $g \in G$ die Abbildung $x \longmapsto g \cdot x$ ein Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie, dass

$$A^G = \{x \in A \mid g \cdot x = x \text{ für alle } g \in G\}$$

ein Unterring von A ist. Zeigen Sie, dass A ganz über A^G ist.

Aufgabe 6.18. Sei A ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K. Zeigen Sie, dass R ganz abgeschlossen in K ist; das heißt jedes über A ganze Element von K gehört zu A.

6.3 Der Noethersche Normalisierungssatz

Definition 6.19. Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Sei B eine A-Algebra. Eine endliche Familie von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in B$ bildet ein *algebraisch unabhängiges System über* A, wenn der induzierte A-Algebrenhomomorphismus

$$A[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B\,, \quad X_i \longmapsto x_i$$

injektiv ist.

Definition 6.20. Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Eine A-Algebra von endlichem Typ ist eine A-Algebra B, so dass es endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in B$ mit $A[x_1, \ldots, x_n] = B$ existiert.

Notiz 6.21. Sei B eine A-Algebra und seien $x_1, \dots, x_n \in B$. Diese Elemente bilden ein erzeugendes System von B als A-Algebra (also $A[x_1, \dots, x_n] = B$) genau dann, wenn der induzierte A-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow B\,, \quad X_i \longmapsto x_i$$

surjektiv ist. In diesem Fall, ist $I = \ker(\varphi)$, so erhalten wir einen A-Algebrenisomorphismus

$$A[X_1, \dots, X_n]/I \cong B\,.$$

Umgekehrt ist jede A-Algera isomorph zu einem Quotient von $A[X_1, \dots, X_n]$ von endlichen Typ.

Hilfsatz 6.22 (Nagata)**.** *Sei* K *ein Körper und* $n \in \mathbb{N}_{>0}$. *Sei* $F \in A = K[X_1, \dots, X_n]$ *nicht konstant. Es existiert natürlische Zahlen* $m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, *so dass, bezeichnend* $Y_i = X_i - X_1^{m_i}$ *für* $1 < i \le n$, *der Ring* A *ganz über den Unterring* $B = K[F, Y_2, \dots, Y_n]$ *ist.*

Beweis. Seien $m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir bezeichnen $Y_i = X_i - X_1^{m_i}$ für $1 < i \le n$ und definieren $B = K[F, Y_2, \dots, Y_n]$. Sei $P \in B[T]$ definiert durch

$$P(T) = F(T, Y_2 + T^{m_2}, \dots, Y_n + T^{m_n}) - F\,.$$

Es ist einfach $B[X_1] = A$ und

$$P(X_1) = F(X_1, Y_2 + X_1^{m_2}, \dots, Y_n + X_1^{m_n}) - F(X_1, X_2, \dots, X_n) = F - F = 0\,.$$

Daher, nach Korollar 6.12, ist es genug zu zeigen, dass der höchste Koeffizient von P in K (daher in B invertierbar) ist. Es ist $F(X_1, \dots, X_n)$ eine Summe der Form

$$F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)} c_\alpha \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}$$

mit jede $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $c_\alpha \in K$. Es gibt $d \in \mathbb{N}$, so dass $c_\alpha = 0$ für $d < \sum_{i=1}^n \alpha_i$ gilt. Es ist für jede $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $2 \le i \le n$

$$(Y_i + T^{m_i})^{\alpha_i} = T^{m_i \cdot \alpha_i} + Q_{\alpha_i}(T)$$

mit $Q_{\alpha_i}(T) \in B[T]$ mit $\deg(Q_{\alpha_i}) < m_i \cdot \alpha_i$. Sei $d(\alpha) = \alpha_1 + \sum_{i>1} \alpha_i \cdot m_i$. Wir erhalten

$$P(T) = \sum_\alpha c_\alpha \cdot (T^{d(\alpha)} + R_\alpha(T))$$

wobei jedes $R_\alpha(T) \in B[T]$ ein Polynom mit $\deg(R_\alpha) < d(\alpha)$ ist. Wir nehmen jetzt

$$m_i = (d+1)^{i-1}$$

für $1 < i \le n$. Also ist $d(\alpha) \ne d(\beta)$ für $\alpha \ne \beta$ (Aufgabe). Daher gibt es ein α so, dass c_α der höchste Koeffizient von P ist. $\square$

Satz 6.23 (Noetherscher Normalisierungssatz)**.** *Sei* K *ein Körper. Sei* A *eine* K*-Algebra der endlichen Typ. Wir nehmen an, dass* A *ein Integritätsring ist. Dann existiert* $m \in \mathbb{N}$ *und ein algebraisch unabhängiges System* $x_1, \ldots, x_m \in A$ *über* K *mit* A *endlich (insbesondere ganz) über* $K[x_1, \ldots, x_m]$*.*

Beweis. Sei

$$n = \min\Big\{ r \in \mathbb{N} \;\Big|\; \text{es gibt } a_1, \ldots, a_r \in A \text{ mit } K[a_1, \ldots, a_r] = A \Big\}.$$

Wir beweisen induktiv über n.

Ist $n = 0$, so ist $A = K$, und es gibt nichts zu tun.

Sei $n > 0$. Wir wählen $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $A = K[a_1, \ldots, a_n]$. Sei

$$\begin{aligned} \varphi : K[X_1, \ldots, X_n] &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto P(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

der induzierte surjektive Ringhomomorphismus. Ist φ injektiv, so ist $a_1, \ldots, a_n$ selbst ein algebraisch unabhängiges System über K. Sonst ist $\mathfrak{p} = \ker(\varphi)$ ein Primideal da A ein Integritätsring ist. Insbesondere gibt es ein nicht-konstantes Polynom $F \in \mathfrak{p}$. Wir anwenden dann das Lemma von Nagata (6.22) und finden ein Unterring $B \subset C = K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $F \in B$ so, dass C endlich über B ist. Daher ist

$$B' = B/\mathfrak{p} \cap B \hookrightarrow C/\mathfrak{p} \cong A$$

eine endliche Erweiterung von Ringen. Sei y_i die Restklasse von Y_i in B'. Da $B = K[F, Y_2, \ldots, Y_n]$ gilt $B' = K[y_2, \ldots, y_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $m \in \mathbb{N}$ und ein algebraisch unabhängiges System $x_1, \ldots, x_m \in B'$ über K mit B' endlich über $K[x_1, \ldots, x_m]$. Nach Satz 6.11 ist A endlich über $K[x_1, \ldots, x_m]$. □

Aufgabe 6.24 (Generischer Noetherscher Normalisierungssatz)**.** Sei R ein Integritätsring.

(i) Sei $F \in A = R[X_1, \ldots, X_n]$ nicht konstant. Zeigen Sie, dass es Zahlen $m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ und $f \in R$ existiert, so dass, bezeichnend $Y_i = X_i - X_1^{m_i}$ für $1 < i \leq n$, der Ring $A[f^{-1}]$ ganz über den Unterring $B = R[f^{-1}][F, Y_2, \ldots, Y_n]$ ist.

(ii) Sei A eine R-Algebra der endlichen Typ. Wir nehmen an, dass A ein Integritätsring ist. Zeigen Sie, dass es $m \in \mathbb{N}$, $f \in R$, und ein algebraisch unabhängiges System $x_1, \ldots, x_m \in A$ über K, mit $A[f^{-1}]$ endlich (insbesondere ganz) über $R[f^{-1}][x_1, \ldots, x_m]$ existiert.

6.4 Radikale

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 6.25. Ist $\mathfrak{a} \subset R$, so bezeichnen wir sein *Radikal*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \left\{ x \in R \,\middle|\, \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Das *Nilradikal* von R ist $\sqrt{(0)}$.

Satz 6.26. *Es ist das Nilradikal der Durschnitt aller Primideale. Insbesondere ist das Nilradikal ein Ideal.*

Beweis. Es gilt nach Definition

$$\sqrt{(0)} = \left\{ x \in R \,\middle|\, \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = 0 \right\}.$$

Also, ist $x \in R$ nilpotent (das heißt mit $x^n = 0$ für n groß genug), so ist $x^n \in \mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset R$. Daher gilt $x \in \mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ (induktiv über n). Umgekehrt, sei $x \in R$, das nicht nilpotent ist. Wir werden zeigen, das es ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ mit $x \notin \mathfrak{p}$ gibt. Sei

$$\mathfrak{a} = \left\{ y \in R \,\middle|\, \frac{y}{1} = 0 \text{ in } R[x^{-1}] \right\}.$$

Es ist ein Ideal von R. Außerden gilt

$$x \text{ nilpotent} \iff \mathfrak{a} = 0$$

(nach konstruktion von $R[x^{-1}]$). Also ist $R[x^{-1}] \neq \{0\}$. Daher existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R[x^{-1}]$. Es ist dann

$$\mathfrak{p} = \left\{ y \in R \,\middle|\, \frac{y}{1} \in \mathfrak{m} \right\}$$

ein Primideal von R mit

$$\mathfrak{p} \cap \left\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \varnothing$$

(erste Aussage von Satz 3.19). Also gilt $x \notin \mathfrak{p}$. □

Korollar 6.27. *Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Es ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ der Durschnitt aller Primideale von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Insbesondere ist das Radikal einem Ideal ein Ideal.*

Beweis. Sei $\pi : R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$ die kanonische Abbildung. Sie induziert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \left\{ \text{Primideale von } R/\mathfrak{a} \right\} &\longrightarrow \left\{ \text{Primideale von } R, \text{ die } \mathfrak{a} \text{ enthalten} \right\} \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \pi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

und $\pi^{-1}(\sqrt{(0)}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Wegen das Nilradikal von $R/\mathfrak{a}$ der Durschnitt aller Primideale von $R/\mathfrak{a}$ ist gilt dann dieses Korollar. □

Beispiel 6.28. Ist R ein Integritätsring, so ist sein Nilradikal null.

Beispiel 6.29. Sei K ein Körper und sei $R = K[\varepsilon] = K[X]/(X^2)$ mit ε die Restklasse von X modulo (X^2). Dann ist $(\varepsilon) \neq (0)$ das Nilradikal von R denn R nur ein Primideal hat, tatsächlich (ε).

Definition 6.30. Das *Jacobsonsche Radikal* von R ist der Durschnitt aller maximalen Ideale.

Notiz 6.31. Sei $\mathfrak{R} \subset R$ das Jacobsonsche Radikal von R und sei $x \in R$. Es ist $x \in \mathfrak{R}$ genau dann, wenn $1 + x \cdot y$ für alle $y \in R$ invertierbar ist (Aufgabe 3.30). Außerdem gilt

$$\sqrt{(0)} \subset \mathfrak{R}.$$

Notiz 6.32. Ist R lokal, so ist sein Jacobsonsches Ideal genau sein maximales Ideal. Insbesondere, ist R ein lokaler Integritätsring, der kein Körper ist (zum Beipiel $R = A_{\mathfrak{p}}$ mit A ein Hauptideal ring und $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal), so gilt

$$(0) = \sqrt{(0)} \neq \mathfrak{R}.$$

Aufgabe 6.33. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ Ideale. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften.

(i) $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$

(ii) $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$

(iii) $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$

(iv) $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

(v) $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

(vi) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ prim, so gilt $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \sqrt{\mathfrak{p}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 6.34. Sei A ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A enthält genau ein Primideal.

(ii) Jedes Element von A ist invertierbar oder nilpotent.

(iii) das Quotient $A/\sqrt{(0)}$ ist ein Körper.

6.5 Der Nullstellensatz

Satz 6.35 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei* K *ein Körper und sei* A *eine* K*-Algebra von endlichem Typ. Für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m} \subset A$ *ist die induzierte Körpererweiterung* $K \subset A/\mathfrak{m}$ *endlich.*

Beweis. Sei $L = A/\mathfrak{m}$. Es ist noch eine K-Algebra von endlichem Typ. Es ist auch ein Integritätsring, tatsächlich ein Körper. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz (6.23) existiert $n \in \mathbb{N}$ und ein algebraisch unabhängiges System $x_1 \ldots, x_n \in L$ mit L endlich über $K[x_1, \ldots, x_n]$. Vom Satz 6.15 folgt, dass das Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Körper ist. Also ist $n = 0$ und L ist endlich über $K = K[x_1, \ldots, x_n]$. □

Korollar 6.36. *Sei* K *ein Körper und sei* A *eine* K*-Algebra von endlichem Typ. Das Nilradikal von* A *und das Jacobsonsche Radikal von* A *sind gleich.*

Beweis. Es ist genug zu zeigen, dass jedes Element vom Jacobsonschen Radikal nilpotent ist. Äquivalent, können wir beweisen, dass für jedes $f \in A$ nichtnilpotent es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit $f \notin \mathfrak{m}$ existiert. Sei $f \in A$ kein nilpotentes Element. Dann ist der Ring $A[f^{-1}]$ nicht trivial. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $A[f^{-1}]$. Es ist

$$\mathfrak{p} = \left\{ a \in A \;\middle|\; \frac{a}{1} \in \mathfrak{m} \right\}$$

ein Primideal von A mit

$$\mathfrak{p} \cap \left\{ f^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \varnothing.$$

Es ist jetzt genug zu zeigen, dass $\mathfrak{p}$ maximal ist. Aber der K-Algebra $A[f^{-1}]$ ist von endlichem Typ: der Polynomring $A[X]$ ist vom endlich Typ über $K[X]$ und daher über K, und

$$A[f^{-1}] \cong A[X]/(X \cdot f - 1).$$

Nach dem Nullstellensatz (6.35) ist $F = A[f^{-1}]/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K. Aber $E = A/\mathfrak{p}$ ist dann ein Zwischenring von E/K. Also ist E ein Untervektorraum von F und daher ist er endlich erzeugt über K. Vom Satz 6.15 folgt, dass das E ein Körper ist. Äquivalent ist $\mathfrak{p}$ maximal. □

Korollar 6.37. *Sei* K *ein Körper und sei* A *eine* K*-Algebra von endlichem Typ. Ist* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal, so ist das Radikal von* $\mathfrak{a}$ *der Durschnitt aller maximalen Ideale von* A*, die* $\mathfrak{a}$ *enthalten.*

Beweis. Sei $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ die kanonische Abbildung. Sie induziert eine Bijektion

$$\left\{\text{maximalen Ideale von } A/\mathfrak{a}\right\} \longrightarrow \left\{\text{maximalen Ideale von A, die } \mathfrak{a} \text{ enthalten}\right\}$$
$$\mathfrak{q} \longmapsto \pi^{-1}(\mathfrak{q})$$

und $\pi^{-1}(\sqrt{(0)}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Wegen, nach Korollar 6.36, das Nilradikal von $A/\mathfrak{a}$ der Durschnitt aller maximalen Ideale von $R/\mathfrak{a}$ ist gilt dann dieses Korollar. □

Korollar 6.38. *Sei* K *ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei* $n \in \mathbb{N}$. *Die Regel*

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \mathfrak{m}_a = \left\{ p \in K[X_1, \ldots, X_n] \;\middle|\; p(a_1, \ldots, a_n) = 0 \right\}$$

bestimmt eine Bijektion

$$\mathrm{K}^n \cong \left\{ \textit{maximalen Ideale von } \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n] \right\}.$$

Beweis. Für jede $a \in \mathrm{K}^n$ ist $\mathfrak{m}_a$ der Kern der surjektiven Abbildung $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n] \longrightarrow \mathrm{K}$ definiert durch $p \longmapsto p(a)$. Daher gilt

$$\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]/\mathfrak{m}_a \cong \mathrm{K}$$

und $\mathfrak{m}_a$ ist ein maximales Ideal. Sind $a, b \in k^n$ mit $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b$, so ist $\mathrm{X}_i - a_i \in \mathfrak{m}_b$ für alle i und daher gilt $b_i - a_i = 0$ für alle i. Also gilt $a = b$. Sei $\mathfrak{m} \subset \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathrm{L} = \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K, nach dem Nullstellensatz (6.35). Da K algebraisch abgeschlossen ist folgt $\mathrm{K} = \mathrm{L}$. Für jede $i \in \{1,\ldots,n\}$ erhalten wir eine Restklasse $a_i \in \mathrm{K}$ von X_i modulo $\mathfrak{m}$. Sei $a = (a_1,\ldots,a_n)$. Dieses Element bezeichnet ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_a$. Es ist

$$\mathfrak{m}_a = (\mathrm{X}_1 - a_1,\ldots,\mathrm{X}_n - a_n).$$

Wegen $\mathrm{X}_i - a_i \in \mathfrak{m}$ gilt erhalten wir die Inklusion $\mathfrak{m}_a \subset \mathfrak{m}$. Die induzierte K-lineare Abbildung

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]/\mathfrak{m}_a \longrightarrow \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]/\mathfrak{m} = \mathrm{K}$$

ist dann bijektiv. Also gilt $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}$. □

Notiz 6.39. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\mathfrak{I} \subset \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ ein Ideal. Da $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ noethersch ist gibt es eine endliche Familie von Polynome $f_1,\ldots,f_m \in \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ mit

$$\mathfrak{I} = (f_1,\ldots,f_m).$$

Dann bezeichnen wir

$$\mathrm{V}(\mathfrak{I}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f_i = 0 \right\} = \left\{ (a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{K}^n \;\middle|\; f_i(a_1,\ldots,a_n) = 0 \text{ für alle } 1 \le i \le m \right\}.$$

Es ist auch

$$\mathrm{V}(\mathfrak{I}) = \left\{ a \in \mathrm{K}^n \mid \mathfrak{I} \subset \mathfrak{m}_a \right\}.$$

Von Korollar 6.38 folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathfrak{I}) &\cong \left\{ \text{maximalen Ideale von } \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n], \text{ die } \mathfrak{I} \text{ enthalten} \right\} \\ &\cong \left\{ \text{maximalen Ideale von } \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]/(f_1,\ldots,f_m) \right\}. \end{aligned}$$

Es folgt dann von Korollar 6.37, dass

$$\sqrt{\mathfrak{I}} = \bigcap_{a \in \mathrm{V}(\mathfrak{I})} \mathfrak{m}_a.$$

Aufgabe 6.40. Sei K ein Körper und sei $f : A \longrightarrow B$ ein K-Algebrenhomomorphismus zwischen zwei kommutative K-Algebren von endlichem Typ. Angenommen ist $\mathfrak{m} \subset B$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 6.41. Geben Sie ein Beispiel von Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zusammen mit einem maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset B$, so dass $f^{-1}(\mathfrak{m})$ kein maximales Ideal ist.

Kapitel 7

Das Spektrum eines Rings

7.1 Die Zariski-Topologie

Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 7.1. Das *Spektrum* von A ist die Menge aller Primideale von A. Man bezeichnet es Spec(A).
Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Es ist

$$V(\mathfrak{a}) = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \;\middle|\; \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \right\}.$$

Satz 7.2. *Die folgenden Eigenschaften gelten.*

(i) $V((0)) = \operatorname{Spec}(A)$*;*

(ii) $V((1)) = \varnothing$*;*

(iii) Ist $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *eine Familie von Ideale in* A*, so gilt* $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$*, wobei* $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ *das Ideal erzeugt von* $\cup_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ *ist;*

(iv) Ist $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *eine endliche Familie von Ideale in* A*, so gilt* $V(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcup_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$*;*

Aufgabe 7.3. Beweisen Sie den Satz 7.2

Definition 7.4. Die Mengen der Form $U = \operatorname{Spec}(A) - V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal sind die geöffneten Mengen einer Topologie auf dem Spektrum von A, die *Zariski-Topologie*.

Satz 7.5. *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringe. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\begin{aligned} f^* : \operatorname{Spec}(B) &\longrightarrow \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\longmapsto f^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Sei $\mathfrak{b} \subset B$ das Ideal erzeugt von $f(\mathfrak{a})$ in B. Dann gilt

$$\left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \;\middle|\; \mathfrak{a} \subset f^{-1}(\mathfrak{q}) \right\} = V(\mathfrak{b}).$$

Das heißt, dass das Urbild einer abgeschlossenen Teilmenge von Spec(A) abgeschlossen in Spec(B) ist. □

Satz 7.6. *Sei* A *ein kommutativer Ring. Dann ist* Spec(A) *kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine geöffnete Überdeckung von Spec(A). Zu jedem $i \in I$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A$ mit $\mathrm{Spec}(A) - U_i = V(\mathfrak{a}_i)$. Es ist

$$V\Big(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\Big) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \varnothing .$$

Das heißt, dass (eine Potenz von) 1 in $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ liegt. Daher existiert endlich viele Elemente $i_1, \ldots, i_n \in I$ und, für jedes k, $1 \le k \le n$, ein Element $f_k \in \mathfrak{a}_{i_k}$ so, dass $1 = \sum_{k=1}^n f_k$ gilt. Daher ist

$$V((1)) = V(\mathfrak{a}_{i_1} + \cdots + \mathfrak{a}_{i_n}) = V(\mathfrak{a}_{i_1}) \cap \cdots \cap V(\mathfrak{a}_{i_n}) = \varnothing .$$

Also ist Spec(A) die endliche Vereinigung $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. □

Definition 7.7. Ein topologischer Raum X ist *noethersch*, wenn jede absteigende Kette abgeschlossener Mengen stationär wird: ist

$$\ldots \subset Z_{n+1} \subset Z_n \subset \ldots \subset Z_1 \subset Z_0 \subset X$$

eine Kette von abgeschlossener Mengen, so gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $Z_n = Z_N$ für alle $n \ge N$.

Aufgabe 7.8. Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede nichtleere Familie von abgeschlossenen Mengen ein minimales Element bezüglich Inklusion hat.

Satz 7.9. *Das Spektrum einem noetherschen Ring ist noethersch.*

Beweis. Sei A ein noetherscher Ring und sei

$$\ldots \subset Z_{n+1} \subset Z_n \subset \ldots \subset Z_1 \subset Z_0 \subset \mathrm{Spec}(A)$$

eine Kette von abgeschlossener Mengen. Für jede $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}_n \subset A$ mit

$$Z_n = V(\mathfrak{a}_n) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_n}).$$

Wegen $Z_{n+1} \subset Z_n$ gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}_n} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Z_n} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p}\in Z_{n+1}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}_{n+1}} .$$

Wir erhalten eine aufsteigende Kette von Ideale

$$\sqrt{\mathfrak{a}_0} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \ldots \subset \sqrt{\mathfrak{a}_n} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_{n+1}} \subset \ldots$$

Da der Ring A noethersch ist gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\mathfrak{a}_n} = \sqrt{\mathfrak{a}_N}$ für alle $n \ge N$. Also gilt $Z_n = Z_N$ für alle $n \ge N$. □

Bemerkung 7.10. Es gibt Ringe mit noetherschem Spektrum, die nicht noethersch sind. Tatsächlich gibt es Ringe mit endlichem Spektrum, die nicht noethersch sind.

Aufgabe 7.11. Sei A ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Die Menge $\{\mathfrak{p}\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.

b) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ gilt $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ (wobei $\overline{Z}$ die abgeschlossene Hülle von Z bezeichnet).

c) Für alle $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ gilt
$$\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}.$$

d) Für alle $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ existiert eine geöffnete Menge U in Spec(A) mit $\mathfrak{p} \in U$ und $\mathfrak{q} \notin U$, oder mit $\mathfrak{q} \in U$ und $\mathfrak{p} \notin U$.

7.2 Irreduzible Komponenten

Definition 7.12. Sei X ein topologischer Raum. Man sagt, dass X *reduzibel* ist, wenn es abgeschlossenen Mengen $Y \subsetneq X$ und $Z \subsetneq X$ mit $X = Y \cup Z$ gibt. Sonst sagen wir, dass X *irreduzibel* ist.

Satz 7.13. *Sei* X *ein topologischer Raum. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

(i) Der Raum X *ist irreduzibel.*

(ii) Jede nichtleere geöffnete Menge ist dicht.

(iii) Zwei nichtleeren geöffneten Teilmengen treffen einander.

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(iii) gilt nach Definition. Angenommen gilt Eigenschaft (ii). Das heißt, dass die abgeschlossene Hülle einer nichtleeren geöffnete Menge immer den ganze Raum ist. Äquivalent, für $\varnothing \neq U \subset Z \subset X$ mit U geöffnet und Z abgeschlossen gilt $Z = X$. Seien $Y, Z \subset X$ abgeschlossen mit $X = Y \cup Z$. Ist $Y \neq X$, so ist $U = X - Y \neq \varnothing$ mit $U \subset Z$. Daher gilt $Z = X$. Das zeigt, dass X irreduzibel ist. Umgekehrt, sei X irreduzibel, und sei $U \subset X$ geöffnet und nichtleer. Ist $Z \subset X$ abgeschlossen mit $U \subset Z$, so gilt $X = Y \cup Z$, wobei $Y = X - U$. Da X irreduzibel ist gilt $Y = X$ oder $Z = X$. Also ist $Z = X$ denn $U \neq \varnothing$. □

Satz 7.14. *Sei* X *ein topologischer Raum.*

(a) Ist $Z \subset X$ *irreduzibel, so ist die abgeschlossene Hülle von* Z *irreduzibel.*

(b) Seien $U, V \subset X$ *irreduzibel und geöffnet, mit* $U \cap V \neq \varnothing$. *Dann ist* $U \cup V$ *irreduzibel.*

(c) *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist $Z \subset X$ irreduzibel, so ist $f(Z)$ irreduzibel.*

Beweis. Zu (a). Wir werden die Bestimmung (ii) von Satz 7.13 benützen. Sei $Z \subset X$ irreduzibel mit abgeschlossener Hülle $\overline{Z}$. Sei $U \subset \overline{Z}$ eine nichtleere Menge geöffnet in $\overline{Z}$. Also ist $U \cap Z$ geöffnet in Z. Es ist $U \cap Z$ nicht leer: sonst wäre $Z \subset X - U$ und daher $\overline{Z} \subset X - U$, im Widerspruch mit U nicht leer in $\overline{Z}$. Da Z irreduzibel ist folgt dann, dass $U \cap Z$ dicht in Z ist. Daher ist $U \cap Z$ dicht in $\overline{Z}$ auch. Es folgt, dass U dicht in $\overline{Z}$ ist.

Zu (b). Wir werden die Bestimmung (iii) von Satz 7.13 benützen. Seien $W_i \subset U \cup V$ nichtleer und geöffnet, $i = 1, 2$. Angenommen ist $W_i \cap U \neq \varnothing$ bzw. $W_i \cap V \neq \varnothing$. Dann sind W_i und $U \cap V$ nichtleeren geöffneten Mengen von U bzw. von V. Da U bzw. V irreduzibel ist folgt dann, dass $W_i \cap U \cap V \neq \varnothing$ für $i = 1, 2$ ist. Von der Irreduzibilität von U folgt dann, dass $W_1 \cap W_2 \cap U \cap V \neq \varnothing$ gilt. Insbesondere ist $U \cap V$ nicht leer.

Zu (c). Sei $Z \subset X$ irreduzibel. Seien U und V geöffnet und nicht leer in $f(Z)$. Dann sind $f^{-1}(U) \cap Z$ und $f^{-1}(V) \cap Z$ geöffnet in Z und nicht leer. Daher ist der Durchschnit

$$f^{-1}(U \cap V) \cap Z = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap Z$$

nicht leer. Insbesondere ist $U \cap V$ nicht leer. Nach Satz 7.13 folgt, dass $f(Z)$ irreduzibel ist. □

Satz 7.15. *Sei A ein kommutativer Ring mit Eins mit Nilradikal $\mathfrak{N} = \sqrt{(0)}$. Der Raum $X = \mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann irreduzibel, wenn das Quotient $A/\mathfrak{N}$ ein Integritätsring ist.*

Beweis. Sei $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{N}$ die kanonische Abbildung. Die induzierte Abbildung

$$\pi^* : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{N})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

ist einfach ein Homöomorphismus. Also ist ohne Einschränkung $\mathfrak{N} = (0)$. Angenommen ist A ein Integritätsring. Sei $X = Y \cup Z$ eine abgeschlossene Überdeckung. Es gibt Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ mit $Y = V(\mathfrak{a})$ und $Z = V(\mathfrak{b})$. Daher gilt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$. Also, für jede $f \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{b}$ gilt $f \cdot g = 0$. Da A ein Integritätsring ist folgt $f = 0$ oder $g = 0$. Das heißt, dass $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{b} = (0)$ gilt. Äquivalent ist Y leer oder Z leer. Das zeigt, dass X irreduzibel ist. Sei schließlich X irreduzibel. Seien $f, g \in A$ mit $f \cdot g = 0$. Also, für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ gilt $f \cdot g \in \mathfrak{p}$, so dass $(f) \subset \mathfrak{p}$ oder $(g) \subset \mathfrak{p}$ gilt. Äquivalent gilt $V((f)) \cup V((g)) = X$. Da X irreduzibel ist $V((f)) = X$ oder $V((g)) = X$. Das heißt, dass $\sqrt{(f)} = (0)$ oder $\sqrt{(g)} = (0)$ ist (da $\mathfrak{N} = (0)$ angenommen ist). Also ist $f = 0$ oder $g = 0$. □

Definition 7.16. Sei X ein noetherscher topologische Raum. Eine *irreduzible Komponente* von X ist ein irreduzible abgeschlossene Menge, die maximal bezüglich Inklusion ist.

Satz 7.17. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum.*

(i) *Es gibt endlich viele irreduziblen Komponenten.*

(ii) *Seien* $X_1, \ldots, X_n$ *die irreduziblen Komponenten von* X. *Dann gilt*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n.$$

(iii) *Jede irreduzible abgeschlossene Menge ist in einer irreduziblen Komponenten enthält.*

Beweis. Wir werden erst zeigen, dass jede abgeschlossene Menge $Y \subset X$ eine Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Mengen. Sei $\mathscr{F}$ die Familie von abgeschlossenen Mengen, die keine Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Mengen sind. Angenommen ist $\mathscr{F}$ nicht leer. Dann bekommen $\mathscr{F}$ ein minimales Element Y (da X noethersch ist). Insbesondere ist eine solche Y nicht irreduzibel: es gibt $Y_1, Y_2 \subsetneq Y$ abgeschlossene mit $Y = Y_1 \cup Y_2$. Da Y_1 und Y_2 kein Elemente von $\mathscr{F}$ sind (aus der Minimalität von Y) folgt, dass beide Y_1 und Y_2 Vereinigungen von irreduziblen abgeschlossenen Mengen sind. Daher so ist $Y = Y_1 \cup Y_2$ – Widerspruch.
Insbesondere gibt es irreduziblen abgeschlossenen Mengen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \not\subset X_j$ für $i \neq j$, so dass gilt. Ist $Y \subset X$ irreduzibel und abgeschlossen, so ist

$$Y = (X_1 \cap Y) \cup \cdots \cup (X_n \cap Y).$$

Da Y irreduzible ist gibt es i mit $X_i \cap Y = Y$. Also gilt $Y \subset X_i$. Ist Y eine irreduzible Komponente, so gilt tatsächlich $Y = X_i$. Umgekehrt, für $1 \leq i \leq n$ ist X_i eine irreduzible Komponente: ist $X_i \subset Y$ mit Y irreduzibel und abgeschlossen, so gilt $Y \subset X_j$ für ein j und daher $X_i = Y = X_j$. □

Die zweite Teil des Beweis oben zeigt:

Satz 7.18. *Sei* X *ein noetherscher topologischer Raum und seien* $X_1, \ldots, X_n$ *irreduziblen abgeschlossenen Mengen mit mit folgender Eigenschaften:*

(i) *Es gilt* $X_i \not\subset X_j$ *für* $i \neq j$.

(ii) *Es ist* $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$.

Dann ist $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *die Menge von irreduziblen Komponenten.*

Satz 7.19. *Sei* A *ein noetherscher Ring. Ein abgeschlossene Menge* $Z \subset \operatorname{Spec}(A)$ *ist irreduzibel genau dann, wenn es* $\mathfrak{p} \subset A$ *prim mit* $Z = V(\mathfrak{p})$ *gibt.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, so ist $\{\mathfrak{p}\}$ irreduzibel. Daher ist seine abgeschlossene Hülle $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ irreduzibel, nach Aussage (a) von Satz 7.14. Umgekehrt, sei Z abgeschlossen und irreduzibel. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{I}$ mit $Z = V(\mathfrak{I})$. Sei $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{I}}$ das Radikal von $\mathfrak{I}$. So gilt

$$Z = V(\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p}).$$

Es ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{I}$ das Nilradikal von $A/\mathfrak{I}$. Da Z irreduzibel ist, folgt von Satz 7.15, dass $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist. Also ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal. □

Notiz 7.20. Also gibt es eine genaue Korrespondenz zwischen minimale Primideale und irreduzible Komponenten.

Korollar 7.21. *Sei* A *ein noetherscher Ring. Dann enthält* A *endlich viele minimale Primideale. Sind* $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ *die minimale Primideale, so gilt*

$$\sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n .$$

Korollar 7.22. *Sei* A *ein noetherscher Ring und seien* $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ *Primideale mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es gilt $\sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$.

(ii) Es ist $\mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{p}_i$ *für* $i \neq j$.

Dann ist $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ *die Menge aller minimalen Primidealen.*

Aufgabe 7.23 (Noethersche Induktion)**.** Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Angenommen ist zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $Z \subset X$ eine Aussage $P(Z)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(i) $P(\varnothing)$ gilt.

(ii) Ist $P(Y)$ wahr für jede $Y \subsetneq Z$, so gilt $P(Z)$.

Zeigen Sie, dass $P(Z)$ für jede abgeschlossene Menge $Z \subset X$ gilt.

Kapitel 8

Primärzerlegung

8.1 Assoziierte Primideale

Sei A ein kommutativer noetherscher Ring und sei M ein A-Modul.

Definition 8.1. Ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ ist *assoziiert an* M falls es der Annulator eines Elements von M ist: es gibt $x \in \mathrm{M}$ mit

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x) = \left\{ a \in \mathrm{A} \;\middle|\; a \cdot x = 0 \right\}.$$

Man bezeichnet Ass(M) die Menge von assoziierten Primidealen an M.

Notiz 8.2. Seien $x \in \mathrm{M}$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A)}$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} \cdot x \longrightarrow \{0\}.$$

Äquivalent ist

$$\mathrm{A}/\mathfrak{p} \cong \mathrm{A} \cdot x \subset \mathrm{M}.$$

Also ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ assoziiert an M genau dann, wenn es ein Untermodul von M isomorph zu $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ gibt. Insbesondere gilt $\mathrm{Ass}(\{0\}) = \varnothing$.

Satz 8.3. *Sei* $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ *ein Primideal. Dann gilt* $\mathrm{Ass}(\mathrm{A}/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{A}/\mathfrak{p})$ da $\mathfrak{p}$ der Annulator von $1 \in \mathrm{A}/\mathfrak{p}$ ist. Sei $a \in \mathrm{A}$ mit $\bar{a} \neq 0$ in $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$. Also ist $a \notin \mathfrak{p}$. Ist $b \in \mathrm{A}$, so dass $\bar{b} \in \mathrm{Ann}(\bar{a})$ gilt, so ist $a \cdot b \in \mathfrak{p}$ und daher gilt $b \in \mathfrak{p}$. □

Satz 8.4. *Sei* $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ *ein Ideal, das maximal bei Annulatoren von nicht-nullen Elementen in* M *ist. Dann ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal.*

Beweis. Seien $a, b \in \mathrm{A}$ mit $a \cdot b \in \mathfrak{p}$. Wir wählen $x \in \mathrm{M} - \{0\}$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$. Dann gilt $a \cdot b \cdot x = 0$. Ist $b \notin \mathfrak{p}$, so ist $b \cdot x \neq 0$ und $a \in \mathrm{Ann}(b \cdot x)$. Aber es ist $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(b \cdot x)$ denn von $y \cdot x = 0$ folgt $y \cdot b \cdot x = 0$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{p}$ erhalten wir

$$a \in \mathrm{Ann}(b \cdot x) = \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}.$$

Gleichweise, ist $a \notin \mathfrak{p}$, so gilt $b \in \mathfrak{p}$. □

Korollar 8.5. *Jeder nicht-nulle* A*-Modul bekommt mindestens ein assoziiertes Primideal.*

Beweis. Sei $M \neq \{0\}$ ein A-Modul. Sei I die Menge von Idealen der Form $\mathrm{Ann}(x)$ mit $x \in M - \{0\}$. Es ist nicht leer da M nicht null ist. Da A noethersch ist existiert ein maximales Element $\mathfrak{p}$ in I (Aussage (iii) von Satz 5.2). Nach Satz 8.4 ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal. □

Satz 8.6. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Es existiert eine endliche aufsteigende kette von Untermoduln der Form*

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M$$

so, dass jedes Quotient M_i/M_{i-1} *isomorph zu einem* A*-Modul der Form* $A/\mathfrak{p}_i$ *mit* $\mathfrak{p}_i$ *prim ist.*

Beweis. Sei I die Menge aller Untermoduln $N \subset M$ wofür es eine endliche aufsteigende kette von Untermoduln der Form

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_r = N$$

existiert so, dass jedes Quotient N_j/N_{j-1} isomorph zu einem A-Modul der Form $A/\mathfrak{q}_j$ mit $\mathfrak{q}_j$ prim ist. Es ist $\neq \varnothing$ wegen $\{0\} \in I$ ist. Sei $N \in I$ mit $N \neq M$. Wir wählen eine Kette von Untermoduln wie oben. Wir werden zeigen, dass es $N' \in I$ mit $N \subsetneq N'$ gibt. Es ist $M/N \neq \{0\}$. Daher existiert ein assoziiertes Primideal $\mathfrak{q}_{r+1}$ an M/N, nach Korollar 8.5. Sei $x \in M$ mit Restklasse $\bar{x}$ modulo N so, dass $\mathrm{Ann}(\bar{x}) = \mathfrak{q}_{r+1}$ gilt. Sei $N' = N + x \cdot A$. Dann gilt

$$N'/N = A \cdot \bar{x} \cong A/\mathfrak{q}_{r+1}\,.$$

Definierend $N'_j = N_j$ für $0 \leq j \leq r$ bekommen wir

$$\{0\} = N'_0 \subset N'_1 \subset \ldots \subset N'_r = N \subset N'_{r+1} = N'$$

so, dass jedes Quotient N'_j/N'_{j-1} isomorph zu einem A-Modul der Form $A/\mathfrak{q}_j$ mit $\mathfrak{q}_j$ prim ist. Also ist $N' \in I$. Da A noethersch ist existiert ein maximales Element in I. Aber nach der Erklärung oben soll ein solches maximales Element gleich zu M werden. □

Satz 8.7. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

ein kurze exakte Sequenz von A*-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

Beweis. Die Inklusion $\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M)$ ist einfach. Wir werden nur die zweite Inklusion beweisen. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal assoziiert an M. Es ist der Annulator eines Elements $x \in M$. Ist $(A \cdot x) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$, so ist die Einschränkung von g auf $A \cdot x$ injektiv, und daher ist $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(g(x)) \in \mathrm{Ass}(M'')$. Sei jetzt $(A \cdot x) \cap \mathrm{im}(f) \neq \{0\}$. Dann gibt es $x' \in M'$ und $a \in A$

mit $a \cdot x = f(x') \neq 0$. Nach der Injektivität von f gilt $\mathrm{Ann}(x') = \mathrm{Ann}(f(x')) = \mathrm{Ann}(a \cdot x)$. Aber ein Element $b \in \mathrm{A}$ ist genau dann in $b \in \mathrm{Ann}(a \cdot x)$, wenn $a \cdot b \in \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$ gilt. Da $a \notin \mathfrak{p}$ gilt dann $\mathrm{Ann}(f(x')) = \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M}')$. □

Korollar 8.8. *Sei* M *ein* A*-Modul zusammen mit einer endliche aufsteigende kette von Untermoduln der Form*

$$\{0\} = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}_k = \mathrm{M}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{M}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Ass}(\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}).$$

Beweis. Wir beweisen induktiv über k. Ist $k \leq 1$ ist es einfach. Sei $k > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{M}_{k-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathrm{Ass}(\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}).$$

Und nach Satz 8.7 ist $\mathrm{Ass}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{Ass}(\mathrm{M}_{k-1}) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{M}/\mathrm{M}_{k-1})$. □

Korollar 8.9. *Ist* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul, so ist die Menge* Ass(M) *endlich.*

Beweis. Wir wählen eine endliche aufsteigende kette von Untermoduln der Form

$$\{0\} = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}_k = \mathrm{M}$$

so, dass jedes Quotient $\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}$ isomorph zu einem A-Modul der Form $\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{p}_i$ prim ist (das existiert nach Satz 8.6). Aus Satz 8.3 und Korollar 8.8 folgt dann

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{M}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Ass}(\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}.$$

Insbesondere ist Ass(M) endlich. □

Satz 8.10. *Sei* M *ein* A*-Modul und sei* $\mathrm{S} \subset \mathrm{A}$ *eine multiplikative Menge. Ein Primideal* $\mathfrak{p} \subset \mathrm{A}$ *ist genau dann an* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *assoziiert, wenn* $\mathfrak{p} \cap \mathrm{S} = \varnothing$ *und* $\mathfrak{p}$ *an* M *assoziiert ist.*

Beweis. Wir beobachten erst, dass für jedes $x \in \mathrm{M}$ gilt für alle $a \in \mathrm{A}$

$$a \cdot \frac{x}{1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } s \in \mathrm{S} \text{ mit } s \cdot a \cdot x = 0.$$

Äquivalent ist

$$\mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right) = \bigcup_{s \in \mathrm{S}} \mathrm{Ann}(s \cdot x).$$

Sei $\mathrm{S} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ und sei $\mathfrak{p}$ an M assoziiert. Dann gibt es $x \in \mathrm{M}$ mit $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$. Da kein Element von S in $\mathfrak{p}$ ist gilt für alle $a \in \mathrm{A}$ und alle $s \in \mathrm{S}$

$$a \cdot s \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot s \in \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \text{ oder } s \in \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \cdot x = 0.$$

Also ist $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(s \cdot x)$ für alle $s \in \mathrm{S}$. Daher gilt

$$\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right).$$

Das heißt, dass $\mathfrak{p}$ an $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ assoziiert ist.

Umgekehrt, angenommen ist $\mathfrak{p}$ an $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ assoziiert. Sei $x \in \mathrm{M}$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right)$. Es ist $\mathrm{S} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ da sonst würde $\frac{x}{1} = 0$. Da A noethersch ist existiert $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$ mit $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_n)$. Für $1 \leq i \leq n$ existiert $s_i \in \mathrm{S}$ mit $s_i \cdot a_i \cdot x = 0$ in M. Sei $s = s_1 \cdots s_n$. Es ist $s \cdot a_i \cdot x = 0$ für alle i und daher $s \cdot a \cdot x = 0$ für alle $a \in \mathfrak{p}$. Also gilt

$$\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ann}(s \cdot x) \subset \bigcup_{s \in \mathrm{S}} \mathrm{Ann}(s \cdot x) = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right) = \mathfrak{p}.$$

Daher ist $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(s \cdot x)$ an M assoziiert. □

Hilfsatz 8.11. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $a \in \mathrm{A}$. *Wir betrachten* $\mathrm{M}[a^{-1}] = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *mit* $\mathrm{S} = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$. *Der* A*-Modul* $\mathrm{M}[a^{-1}]$ *ist genau dann null, wenn es eine natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $a^n \cdot x = 0$ *für alle* $x \in \mathrm{M}$ *gibt.*

Beweis. Existiert eine solche n so ist $\frac{x}{1} = 0$ in $\mathrm{M}[a^{-1}]$ für alle $x \in \mathrm{M}$ nach Definition. Umgekehrt, sei $\mathrm{M}[a^{-1}] = \{0\}$. Wir wählen ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_r$ von M als A-Modul. Für jedes i existiert $n_i \in \mathbb{N}$ mit $a^{n_i} \cdot v_i = 0$, da $\frac{v_i}{1} = 0$ gilt. Sei $n = n_1 \cdots n_r$. Dann gilt $a^n \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}$ denn: es gibt für jedes $x \in \mathrm{M}$ Elemente $a_1, \ldots, a_r \in \mathrm{A}$ mit $x = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_r \cdot v_r$ und $n \cdot v_i = 0$ für alle i gilt. □

Satz 8.12. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $a \in \mathrm{A}$. *Wir betrachten die Skalarmultiplikation* $\lambda_a : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}, \quad x \longmapsto a \cdot x.$

(i) Die Abbildung λ_a *ist genau dann injektiv, wenn* $a \notin \mathfrak{p}$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$.

(ii) Die Abbildung λ_a *ist genau dann nilpotent, wenn* $a \in \mathfrak{p}$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$.

Beweis. Zu (i). Ist $a \in \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$, so gilt $a \in \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ für $x \in \mathrm{M}$ mit $x \neq 0$, und daher ist $x \in \ker(\lambda_a) \neq \{0\}$. Umgekehrt, sei λ_a nicht injektiv. Dann existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ assoziiert an $\ker(\lambda_a)$, nach Korollar 8.5. Aber es ist einfach $a \in \mathrm{Ann}(x)$ für alle $\in \ker(\lambda_a)$. Daher gilt

$$a \in \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\ker(\lambda_a)) \subset \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$$

(nach Satz 8.7).

Zu (ii). Sei λ_a nilpotent. Also gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit der n mal Selbstkomposition $\lambda_a^n = \lambda_{a^n} = 0$. Also gilt $a^n \in \mathrm{Ann}(x)$ für alle $x \in \mathrm{M}$. Insbesondere ist $a^n \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$. Umgekehrt, angenommen ist $a \in \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$. Wir möchten zeigen, dass λ_a nilpotent ist. Nach Hilfsatz 8.11 ist es genug zu beweisen, dass $\mathrm{M}[a^{-1}] = \{0\}$ gilt. Äquivalent, dass $\mathrm{Ass}(\mathrm{M}[a^{-1}]) = \varnothing$ (als A-Modul) gilt, nach Korollar 8.5. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M[a^{-1}])$. Es gibt $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{a^n}\right)$. Äquivalent ist $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right)$. Es gibt keine potenz von a in $\mathfrak{p}$ da $\frac{x}{1} \neq 0$ und $y \longmapsto a \cdot y$ injektiv auf $M[a^{-1}]$ ist. Außerdem gilt einfach

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\left(\frac{x}{1}\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Ann}(a^i \cdot x).$$

Aber es ist die Familie $\{\mathrm{Ann}(a^i \cdot x)\}_{i \geq 0}$ eine aufsteigende Kette von Idealen im noetherschen Ring A. Daher gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(a^i \cdot x)$, und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Aber nach voraussetzung gilt dann $a \in \mathfrak{p}$, im klare Widerspruch zu $a \notin \mathfrak{p}$. □

Aufgabe 8.13. Sei A ein faktorieller Ring und sei $a \in A$. Wir betrachten eine Primfaktorzerlegung $a = u \cdot p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ mit $u \in A^\times$ und $p_1, \ldots, p_r$ irreduziblen Elemente. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ass}(A/(a)) = \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$$

gilt (mit $A/(a)$ als A-Modul). Bestimmen Sie das Nilradikal von $A/(a)$.

Definition 8.14. Der *Träger* von M ist die Menge Supp(M) aller Primidealen $\mathfrak{p}$ mit $M_\mathfrak{p} \neq \{0\}$.

Satz 8.15. *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ genau dann gehört zum Träger von* M, *wenn es $x \in M$ mit* $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{p}$ *gibt.*

Beweis. Es ist $M_\mathfrak{p}$ nicht null genau dann, wenn es $x \in M$ mit $\frac{x}{1} \neq 0$ in $M_\mathfrak{p}$ gibt. Äquivalent gibt es $x \in M$ mit $s \cdot x \neq 0$ für alle $s \notin \mathfrak{p}$. □

Korollar 8.16. *Es ist* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M)$.

Satz 8.17. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul mit Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_r$. Es ist* Supp(M) *die Vereinigung von aller* $V(\mathrm{Ann}(v_i))$, *für* $1 \leq i \leq r$. *Insbesondere ist* Supp(M) *abgeschlossen in* Spec(A).

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ann}(v_i))$ für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Also gilt $\mathrm{Ann}(v_i) \subset \mathfrak{p}$. Daher gilt $s \cdot v_i \neq 0$ für jedes $s \notin \mathfrak{p}$ Insbesondere ist $\frac{v_i}{1} \neq 0$ in $M_\mathfrak{p}$ und daher ist $M_\mathfrak{p} \neq \{0\}$. Umgekehrt, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. Angenommen ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathrm{Ann}(v_i))$ für alle i. Also existiert für jedes i ein Element $a_i \notin \mathfrak{p}$ mit $a_i \cdot v_i = 0$. Sei $a = a_1 \cdots a_r$. Dann gilt $a \cdot x = 0$ für alle $x \in M$. Aber es ist $a \notin \mathfrak{p}$ da sonsts wäre $a_i \in \mathfrak{p}$ für mindestens ein i. Das heißt, dass $M_\mathfrak{p} = \{0\}$ gilt, im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. □

Satz 8.18. *Sei* $\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$ *eine kurze exakte Sequenz von* A*-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'').$$

Beweis. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow M'_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p} \longrightarrow M''_\mathfrak{p} \longrightarrow \{0\}.$$

Daher ist $M_\mathfrak{p}$ nicht null genau dann wenn $M'_\mathfrak{p}$ oder $M''_\mathfrak{p}$ nicht null ist. □

8.19. Wir bezeichnen $\mathrm{Ann}(\mathrm{M})$ den *Annulator von* M, das heißt den Kern dem Ringhomomorphismus

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{M}), \quad a \longmapsto \lambda_a.$$

Also ist $\mathrm{Ann}(\mathrm{M}) = \left\{ a \in \mathrm{A} \mid a \cdot x = 0 \text{ für alle } x \in \mathrm{M} \right\}$.

Satz 8.20. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Dann gilt*

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Sei $a \in \mathrm{A}$. Es ist λ_a genau dann nilpotent, wenn es $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \in \mathrm{Ann}(\mathrm{M})$ gibt. Also gilt die Gleichung

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathfrak{p}$$

nach Aussage (ii) von Satz 8.12. Daher folgt aus Korollar 8.16 die Inklusion

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})}.$$

Sei $a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}$. Also ist $\mathrm{M}[a^{-1}] = \{0\}$. Insbesondere ist $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}} = \{0\}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $a \notin \mathfrak{p}$, da $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ eine weitere Lokalisierung von $\mathrm{M}[a^{-1}]$ ist. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})$. Da $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ nicht null ist gilt dann $a \in \mathfrak{p}$. □

Korollar 8.21. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{V}(\mathrm{Ann}(\mathrm{M})) = \mathrm{Supp}(\mathrm{M}) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathrm{V}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})$ genau dann, wenn $\mathrm{V}(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset \mathrm{Supp}(\mathrm{M})$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{Ann}(\mathrm{M})) &= \mathrm{V}\left(\sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})}\right) \\
&= \mathrm{V}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})} \mathfrak{p}\right) \\
&= \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{M})} \mathrm{V}(\mathfrak{p}) \\
&= \mathrm{Supp}(\mathrm{M})
\end{aligned}$$

Schließlich gilt $\mathrm{V}\left(\sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{M})}\right) = \mathrm{V}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathfrak{p}\right) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathrm{V}(\mathfrak{p})$. □

Korollar 8.22. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Dann sind die Mengen der Form* $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$, *mit* $\mathfrak{p}$ *die minimalen assoziierten Primideale an* M, *die irreduziblen Komponenten in* $\mathrm{Supp}(\mathrm{M})$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 8.21 und aus Satz 7.18. □

Aufgabe 8.23. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Menge Ass(M) hat genau ein Element.

(b) Für jedes $a \in A$ ist die Abbildung $x \longmapsto a \cdot x$ nilpotent oder injektiv auf M.

8.2 Primäre Moduln

Es ist A ein kommutativer noethersche Ring.

Definition 8.24. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Ein Untermodul $N \subset M$ ist $\mathfrak{p}$-*primär*, wenn Ass(M/N) genau des Elements $\mathfrak{p}$ besteht.
Ein Untermodul $N \subset M$ ist *primär*, wenn Ass(M/N) genau ein Element hat.

Satz 8.25. *Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) Das Ideal $\mathfrak{q}$ is primär.

(ii) Die Nullteilern des Quotients $A/\mathfrak{q}$ sind die nilpotenten Elemente.

(iii) Für alle $x, y \in A$, ist $x \cdot y \in \mathfrak{q}$ mit $x \notin \mathfrak{q}$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y^n \in \mathfrak{q}$.

(iv) Es ist das einzige assoziierte Primideal an $A/\mathfrak{q}$ das Radikal von $\mathfrak{q}$.

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus Aufgabe 8.23. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) ist einfach. Aus Aussage (iii) folgt, dass $\sqrt{\mathfrak{q}}$ prim ist. Daher gilt die Äquivalenz (i)⇔(iv). □

Beispiel 8.26. Sei A faktoriell und sei $p \in A$ irreduzibel. Das Ideal $\mathfrak{q} = (p^n)$ ist (p)-primär für $n > 0$.

Aufgabe 8.27. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{q} \subset A$ genau dann $\mathfrak{m}$-primär ist, wenn es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$$

existiert.

Aufgabe 8.28. Sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y, Z]/(X \cdot Y - Z^2)$. Man bezeichnet x bzw. y bzw. z die Restklasse von X bzw. Y bzw. Z.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p} = (x, z)$ ein Primideal ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Restklasse von y in $A/\mathfrak{p}^2$ einen Nullteiler aber kein nilpotentes Element ist. Finden Sie explizit ein Ideal $\mathfrak{q} \subset A$ mit $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$.

(iii) Bestimmen Sie die assoziierten Primideale von $A/\mathfrak{p}^2$.

Satz 8.29. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal. Ist* $(M_i)_{i\in I}$ *eine nichtleere endliche Familie von* $\mathfrak{p}$*-primären Moduln, so ist der Durchschnitt* $N = \bigcap_{i\in I} M_i$ $\mathfrak{p}$*-primär.*

Beweis. Es gibt eine injektive A-lineare Abbildung $M/N \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} M/M_i$, die die Restklasse von $x \in M$ modulo N zu $(x_i)_{i\in I}$ sendet, wobei x_i die Restklasse von x modulo M_i ist. Aus Satz 8.7 und Korollar 8.8 folgt dann, dass

$$\mathrm{Ass}(M/N) \subset \bigcup_{i\in I} \mathrm{Ass}(M/M_i) = \{\mathfrak{p}\}$$

gilt. Außerdem ist $M/N \neq \{0\}$ da M/M_i ein nichttriviales Quotient von M/N für jedes $i \in I \neq \varnothing$ ist. Nach Korollar 8.5 folgt $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$. □

Definition 8.30. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die an M assoziierten Primideale. Eine *Primärzerlegung von* M ist eine Familie von Untermoduln $M_1, \dots, M_r$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Der Untermodul ist $\mathfrak{p}_i$-primär für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$.

(b) Es gilt $\bigcap_{i=1}^r M_i = \{0\}$.

8.3 Existenz

Es sei A ein noetherscher kommutative Ring

Satz 8.31. *Jeder endlich erzeugte* A*-Modul besitzt eine Primärzerlegung.*

Beweis. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die an M assoziierten Primideale. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ betrachten wir die Menge C_i aller Untermoduln $N \subset M$ mit $\mathfrak{p}_i \notin \mathrm{Ass}(N)$. Es ist $C_i \neq \varnothing$ da $\{0\} \in C_i$. Daher besitzt C_i ein maximaler Untermodul M_i. Es ist $M_i \neq M$ da $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(M)$ gilt. Also ist M/M_i nicht null. Nach Korollar 8.5 ist $\mathrm{Ass}(M/M_i)$ nicht leer. Sei $\mathfrak{q}$ ein an M/M_i assoziiertes Primideal. Es gibt $x \in M/M_i$ mit $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{q}$. Sei N das Urbild von $A \cdot x$ durch der kanonischen Projektion $M \longrightarrow M/M_i$. Es gilt $M_i \subsetneq N$ mit $N/M_i \cong A{\cdot}x \cong A/\mathfrak{q}$. Daher, nach Sätze 8.3 und 8.7, ist $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M_i) \cup \{\mathfrak{q}\}$. Aus der Maximalität von M_i in C_i gilt dann $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$.
Nach Satz 8.7 ist

$$\mathrm{Ass}\left(\bigcap_{i=1}^r M_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ass}(M_i) = \varnothing.$$

Daher gilt $\bigcap_{i=1}^r M_i = \{0\}$, nach Korollar 8.5. □

Korollar 8.32. *Sei* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal und seien* $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ *die an* $A/\mathfrak{a}$ *assoziierten Primideale. Zu jedem* $i \in \{1, \dots, r\}$ *gibt es ein* $\mathfrak{p}_i$*-primäres Ideal* $\mathfrak{q}_i$*, so dass* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$ *gilt.*

8.4 Eindeutigkeit

Satz 8.33. *Sei* M *ein endlich erzeugender* A*-Modul. Angenommen gibt es Primideale* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$*, und für jedes Index* i*, einen* $\mathfrak{p}_i$*-primäre Untermodul* $M_i \subset M$*, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) es gilt $\bigcap_{i=1}^r M_i = \{0\}$*;*

(ii) es ist $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ *für* $i \neq j$*;*

(iii) Ist $r > 1$*, so gilt für jedes Index* j

$$\bigcap_{i \in \{1,\ldots,r\}-\{j\}} M_i \neq \{0\}.$$

Dann sind die Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *die an* M *assoziierten Primideale:* $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$*.*

Beweis. Aussage (i) heißt, dass die kanonische Abbildung $M \longrightarrow M/M_1 \oplus \cdots \oplus M/M_r$ injektiv ist. Nach Satz 8.7 und Korollar 8.8 folgt $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Ist $r = 0$, so ist $M = \{0\}$ und es gibt nichts zu sagen. Für $r = 1$ ist $M_1 = \{0\}$ und $M = M/M_1$. Angenommen jetzt ist $r > 1$. Aus Aussage (iii) folgt, dass, für jedes Index j, die kanonische Abbildung

$$\varphi_j : M \longrightarrow \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,r\}-\{j\}} M/M_i$$

nicht injektv ist. Die Kanonische Projektion $M \longrightarrow M/M_j$ induziert nach (i) eine injektive Abbildung

$$\bigcap_{i \in \{1,\ldots,r\}-\{j\}} M_i = \ker(\varphi_j) \longrightarrow M/M_j.$$

Daher gilt

$$\varnothing \neq \mathrm{Ass}(\ker(\varphi_j)) \subset \mathrm{Ass}(M/M_j) = \{\mathfrak{p}_j\}.$$

Also gilt

$$\{\mathfrak{p}_j\} = \mathrm{Ass}(\ker(\varphi_j)) \subset \mathrm{Ass}(M).$$

Insbesondere ist $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Ass}(M)$. □

Korollar 8.34. *Sei* $\mathfrak{a} \subsetneq A$ *ein Ideal. Sei* $\mathfrak{q}_i$ *eine endliche Familie* $\mathfrak{p}_i$*-primären Idealen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$*;*

(ii) die Primideale $\mathfrak{p}_i$ *sind paarweise verschieden;*

(iii) ist $r > 1$*, so gilt für jedes Index* j

$$\mathfrak{a} \neq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i.$$

Dann sind die Ideale $\mathfrak{p}_i$ *die an* $A/\mathfrak{a}$ *assoziierten Primideale,*

Aufgabe 8.35. Sei A ein *reduzierter* Ring (das heißt, dass $\sqrt{(0)} = (0)$ gilt). Zeigen Sie, dass jedes an A assoziiertes Primideal minimal in Ass(A) ist.

Aufgabe 8.36. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ass}(A/\mathrm{Ann}(M)) \subset \mathrm{Ass}(M)$$

gilt.

Satz 8.37. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $M_1, \ldots, M_r$ *eine Primärzerlegung von* M*. Ist* $\mathfrak{p}_i$ *an* M/M_i *assoziiert und minimal in* Ass(M)*, so ist* M_i *der Kern von der kanonischen Abbildung* $M \longrightarrow M_{\mathfrak{p}_i}$.

Beweis. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm (konstruiert durch kanonischen Abbildungen), indem die Zeilen kurze exakte Sequenzen sind (nach Satz 4.8).

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/M_i \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & (M_i)_{\mathfrak{p}_i} \arrow[r, hook] & M_{\mathfrak{p}_i} \arrow[r] & (M/M_i)_{\mathfrak{p}_i} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Nach dem Schlangenlemma (2.5) ist es genug die zwei folgende Aussagen zu zeigen:

(a) *Es ist* $(M_i)_{\mathfrak{p}_i} = \{0\}$.

(b) *Die Abbildung* $M/M_i \longrightarrow (M/M_i)_{\mathfrak{p}_i}$ *ist injektiv.*

Zu (a). Es gibt eine injektive A-lineare Abbildung von M_i nach $\bigoplus_{j \neq i} M/M_j$ (wie im Beweis von Satz 8.33). Daher gilt

$$\mathrm{Ass}(M_i) \subset \bigcup_{j \neq i} \mathrm{Ass}(M/M_j) = \{\mathfrak{p}_j \mid j \neq i\}.$$

Nach Satz 8.10 sind die an $(M_i)_{\mathfrak{p}_i}$ assoziierten Primideale genau die Primideale der Form $\mathfrak{p}_j$ mit $j \neq i$ und $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$. Aus der Minimalität von $\mathfrak{p}_i$ in Ass(M) folgt dann $\mathrm{Ass}((M_i)_{\mathfrak{p}_i}) = \varnothing$. Nach Korollar 8.5 gilt dann $(M_i)_{\mathfrak{p}_i} = \{0\}$.

Zu (b). Sei N der Kern der Abbildung $M/M_i \longrightarrow (M/M_i)_{\mathfrak{p}_i}$. Ist N nicht null, so gilt nach Korollar 8.5

$$\varnothing \neq \mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M/M_i) = \{\mathfrak{p}_i\}.$$

Also ist $\mathrm{Ass}(N) = \{\mathfrak{p}_i\}$. Insbesondere existiert ein Element $x \in N$ mit $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(x)$. Aber da $\frac{x}{1} = 0$ gibt es $s \notin \mathfrak{p}_i$ mit $s \cdot x = 0$, im Widerspruch zu $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{p}_i$. □

Kapitel 9

Moduln endlicher Länge

9.1 Artinsche Moduln

Sei R ein Ring mit Eins.

Definition 9.1. Ein R-Modul ist *artinsch*, wenn jede absteigende Kette von Untermoduln

$$\ldots \subset M_{n+1} \subset M_n \subset \ldots \subset M_1 \subset M_0$$

stationär wird.

Satz 9.2. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von R*-Moduln. Der* R*-Modul* M *ist genau dann artinsch, wenn beide* M′ *und* M″ *artinsch sind.*

Beweis. Angenommen ist M artinsch. Sei $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M′. Es ist $(f(M'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Daher ist sie stationär. Da f injektiv folgt, dass die Kette $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationär ist. Sei $(M''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M″. Die Kette $(g^{-1}(M''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann stationär. Es ist $g(g^{-1}(M''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle n da g surjektiv ist. Also ist $(M''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationär.
Seien M′ und M″ artinsch, und sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist die Kette $(f^{-1}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ stationär. Gleichweise ist $(g(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ stationär. Aus der induzierten kurzen Sequenzen

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{g} M''_n \longrightarrow \{0\}$$

deduzieren wir durch Korollar 2.4 dann, dass die Kette $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationär ist. □

Definition 9.3. Sei R kommutativ. Der Ring R ist *artinsch*, wenn R als R-Modul artinsch ist.

Korollar 9.4. *Ein kommutativer Ring* R *ist genau dann artinsch, wenn jeder endlich erzeugte* R*-Modul artinsch ist.*

Satz 9.5. *Sei* R *ein kommutativer Integritätsring. Ist* R *artinsch, so ist* R *ein Körper.*

Beweis. Sei $x \in R$ mit $x \neq 0$. Die Ideale der Form (x^n) bilden eine absteigende Kette von Ideale. Ist R artinsch, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $(x^{n+1}) = (x^n)$. Also existiert $y \in R$ mit $x^n = x^{n+1} \cdot y$. Da $x^n \neq 0$ gilt und R ein Integritätsring ist folgt $1 = x \cdot y$. □

Korollar 9.6. *Sei* R *ein kommutativer artinsche Ringe. Dann sind alle Primideale von* R *maximal.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist der Ring $R/\mathfrak{p}$ artinsch (da er als R-Modul artinsch ist). Daher ist $R/\mathfrak{p}$ ein Körper. □

9.2 Der Satz von Jordan-Hölder

Sei R ein Ring mit Eins.

Definition 9.7. Ein R-Modul M ist *einfach*, wenn $M \neq \{0\}$ und für jeden Untermodul $N \subsetneq M$ $N = \{0\}$ gilt.

Beispiel 9.8. Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum V ist genau dann einfach, wenn $\dim_K(V) = 1$ gilt.

Notiz 9.9. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung mit M und N einfach. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist injektiv;

(b) f ist surjektiv;

(c) f ist bijektiv;

(d) f ist nicht null.

Definition 9.10. Sei M ein R-Modul. Eine *Kompositionsreihe von* M ist eine endliche Kette von Untermoduln der Form

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

mit jedes Quotient M_i/M_{i-1} einfach. Die Moduln M_i/M_{i-1} heißen *Subquotienten* oder *Kompositionsfaktoren*. Der *assoziiertee graduierte Modul* zur Kompositionsreihe ist

$$\operatorname{gr}(M) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i/M_{i-1}\,.$$

Die *Länge* $\ell(M)$ des Moduls M ist die minimale Länge r einer Kompositionsreihe von M wie oben (es ist $\ell(M) = \infty$ falls keine Kompositionsreihe von M existiert). Falls $\ell(M) < \infty$ sagen wir, dass M ein *Modul endlicher Länge* ist.

Satz 9.11 (Satz von Jordan-Hölder)**.** *Sei* M *ein* R-*Modul.*

(i) *Es ist* M *ein Modul endlicher Länge genau dann, wenn* M *noethersch und artinsch ist.*

(ii) *Ist* M *ein Modul endlicher Länge, so ist der assoziiertee graduierte Modul* $\mathrm{gr}(\mathrm{M})$ *bis auf Isomorphie wohldefiniert (also bis auf Isomorphie hängt* $\mathrm{gr}(\mathrm{M})$ *nicht von der Wahl einer Kompositionsreihe ab).*

Beweis. Zu (i). Sei M ein endlicher Länge Modul. Jeder einfache Modul ist klar noethersch und artinsch. Daher nach Sätze 5.11 und 9.2 folgt, dass M noethersch und artinsch ist. Umgekehrt, sei M noethersch und artinsch. Sei I die Menge aller Untermoduln endlicher Länge in M. Es ist I nicht leere da $\{0\}$ endlicher Länge ist. Daher besitzt I ein maximales Element N. Angenommen ist $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$. Dann ist M/N noethersch und artinsch. Sei J die Menge aller nicht-nullen Untermoduln von M/N. Es ist J nicht leer da M/N selbst nicht null ist. Da M/N artinsch ist existiert ein minimales Element S von J. Also ist S einfach. Sei N' das Urbild von S durch der Projektion $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}/\mathrm{N}$. Es ist $\mathrm{N}'/\mathrm{N} = \mathrm{S}$. Ist

$$\{0\} = \mathrm{N}_0 \subset \mathrm{N}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{N}_r = \mathrm{N}$$

eine Kompositionsreihe von N, so ist dann

$$\{0\} = \mathrm{N}_0 \subset \mathrm{N}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{N}_r \subset \mathrm{N}'$$

eine Kompositionsreihe von N', im Widerspruch zur Maximalität von N. Daher gilt $\mathrm{M} = \mathrm{N}$.

Zu (ii). Wir beweisen induktiv über die Länge von M. Ist $\ell(\mathrm{M}) = 0$, so ist M null. Ist $\ell(\mathrm{M}) = 1$, so ist M selbst einfach. Daher für jede Kompositionsreihe

$$\{0\} = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}_r = \mathrm{M}$$

ist die Inklusion $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}$ eine Gleichung (da beide M_1 und M einfach sind), so dass $\mathrm{M}_i = \mathrm{M}$ für alle $i > 0$ gilt. Insbesondere ist dann $\mathrm{gr}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. Sei $\ell(\mathrm{M}) > 1$. Wir betrachten Kompositionsreihen

$$\{0\} = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}_r = \mathrm{M} \quad \text{bzw.} \quad \{0\} = \mathrm{M}'_0 \subset \mathrm{M}'_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}'_{r'} = \mathrm{M}$$

mit assoziierten graduierten Moduln $\mathrm{gr}(\mathrm{M})$ bzw. $\mathrm{gr}'(\mathrm{M})$. Sei $j \in \{1, \ldots, r'\}$ das kleinste Index mit $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}'_j$ aber $\mathrm{M}_1 \not\subset \mathrm{M}'_{j-1}$. Dann ist die Einschränkung der Projektion $\mathrm{M}_j \longrightarrow \mathrm{M}_j/\mathrm{M}_{j-1}$ auf M_1 nicht null und daher bijektiv:

$$\mathrm{M}_1 \cong \mathrm{M}_j/\mathrm{M}_{j-1}\,.$$

Aber dann ist $\mathrm{M}'_j = \mathrm{M}'_{j-1} \oplus \mathrm{M}_1$ (nach Aufgabe 1.17). Wir bezeichnen $\mathrm{M}''_i = \mathrm{M}'_{i-1} \oplus \mathrm{M}_1$ für $0 < i \leq j$ und $\mathrm{M}''_i = \mathrm{M}'_i$ für $j < i \leq r'$. Wir bekommen dann eine neue Kompositionsreihe

$$\{0\} = \mathrm{M}''_0 \subset \mathrm{M}''_1 \subset \ldots \subset \mathrm{M}''_{r'} = \mathrm{M}$$

mit $M_1 = M''_1$. Wir betrachten das Quotient M/M_1. Dann erhalten wir zwei Kompositionsreihen von M/M_1

$$\{0\} = M_1/M_1 \subset \ldots \subset M_r/M_1 = M/M_1 \quad \text{und} \quad \{0\} = M''_1/M_1 \subset \ldots \subset M''_{r'}/M_1 = M/M_1 \,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $r = r'$ (tatsächlich $r-1 = r'-1$) und

$$\bigoplus_{i>1} M_i/M_{i-1} \cong \bigoplus_{i>1} (M_i/M_1)/(M_{i-1}/M_1) \cong \bigoplus_{i\neq j} (M''_i/M_1)/(M''_{i-1}/M_1) \cong \bigoplus_{i\neq j} M'_i/M'_{i-1}\,.$$

Also bekommen wir

$$\operatorname{gr}(M) = M_1 \oplus \bigoplus_{i>1} M_i/M_{i-1} \cong M_j/M_{j-1} \oplus \bigoplus_{i\neq j} M'_i/M'_{i-1} = \operatorname{gr}'(M),$$

was zu beweisen war. □

Korollar 9.12. *Sei* M *ein Modul endlich Länge. Ist* $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$ *eine Kompositionsreihe von* M, *so gilt* $\ell(M) = r$.

Satz 9.13. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von R*-Moduln. Dann gilt* $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$.

Beweis. Falls einer der Moduln nicht endlich Länge gilt ist M kein Modul endlich Länge, nach Sätze 5.11 und 9.2. Dann gilt $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$ durch $\infty = \infty + \ell(M'')$ oder $\infty = \ell(M') + \infty$. Angenommen sind M, M' und M'' Moduln endlich Länge. Wir betrachten eine Kompositionsreihe $\{0\} = M'_0 \subset M'_1 \subset \ldots \subset M'_{r'} = M'$ und eine Kompositionsreihe $\{0\} = M''_0 \subset M''_1 \subset \ldots \subset M''_{r''} = M''$. Dann bekommen wir eine Kompositionsreihe von M

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{r+r'} = M$$

definiert durch: $M_i = M'_i$ für $0 \le i \le r'$ und $M_i = g^{-1}(M''_i)$ für $r' < i \le r' + r''$. Nach Korollar 9.12 gilt dann $\ell(M) = r' + r'' = \ell(M') + \ell(M'')$. □

Aufgabe 9.14. Sei A ein Hauptideal Ring.

(i) Sei $p \in A$ irreduzibel und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $A/(p^n)$ endlich Länge mit $\ell(A/(p^n)) = n$ ist.

(ii) Angenommen ist A kein Körper. Sei V ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie, dass V endlich Länge ist genau dann, wenn $\operatorname{Ann}(V) \neq \{0\}$ gilt. Angenommen ist jetzt V endlich Länge. Zeigen Sie, dass jedes an V assoziiertes Primideal maximal ist.

(iii) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $A = K[X]$. Sei V ein endlich dimensional K-Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ betrachtet als A-Modul. Zeigen Sie, dass $\dim_K(V) = \ell(V)$ und dass $\mathrm{Ass}(V)$ bis auf der Identifizierung von Korollar 6.38

$$\{\text{maximale Ideale von } A\} \cong K$$

das Spektrum von f ist.

9.3 Artinsche Primärzerlegung

Es ist A ein noetherscher kommutativer Ring.

Hilfsatz 9.15. *Ein* A*-Modul* M *ist genau dann einfach, wenn* $A/\mathfrak{m} \cong M$ *für ein maximales Ideal* $\mathfrak{m} \subset A$ *gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist $K = A/\mathfrak{m}$ ein Körper. Wir beobachten, dass jedes Untermodul von K ein Ideal von K ist. Also ist K einfach als A-Modul. Sei umgekehrt M einfach. Da M nicht null ist existiert $x \neq 0$ in M. Also gilt $A \cdot x = M$ da M einfach ist. Also gilt

$$A/\mathrm{Ann}(x) \cong A \cdot x = M.$$

Es ist dann $K = A/\mathrm{Ann}(x)$ ein nichttrivialer Ring mit der Eigenschaft, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq K$ null ist. Also ist das Ideal $\mathrm{Ann}(x)$ maximal. □

Satz 9.16. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(a) Der Modul ist endlich Länge.

(b) Jedes an M *assoziiertes Primideal ist maximal.*

(c) Jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ *ist maximal.*

Beweis. Zu (a)⇒(b). Sei M endlich Länge, so bekommt M mindestens eine Kompositionsreihe $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$. Nach Korollar 8.8 gilt dann

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1}).$$

Nach Hilfsatz oben ist jedes Quotient M_i/M_{i-1} der Form $A/\mathfrak{m}_i$ mit $\mathfrak{m}_i \subset A$ maximal, und nach Satz 8.3 erhalten wir:

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}.$$

Zu (b)⇒(c). Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximales Ideal, so gilt $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$. Sind alle Elemente von $\mathrm{Ass}(M)$ maximal, so gilt dann nach Korollar 8.21 $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Supp}(M)$. Insbesondere ist jedes Element von

Supp(M) maximal.

Zu (c)⇒(a). Nach Satz 8.6 existiert eine endliche aufsteigende kette von Untermoduln der Form

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

mit $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i \subset A$ prim für jedes i. Insbesondere gilt nach Satz 8.18

$$\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M_i) \subset \mathrm{Supp}(M).$$

Nach Hilfsatz oben ist M_i/M_{i-1} einfach für alle i. Daher ist die Kette oben eine Kompositionsreihe von M. □

Korollar 9.17. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) Der Ring A *ist artinsch.*

(ii) Jedes Primideal von A *ist maximal.*

(iii) Der Raum Spec(A) *ist diskret.*

(iv) Der Raum Spec(A) *ist endlich und diskret.*

Beweis. Es ist Spec(A) = Supp(A). Daher volg die Äquivalenz (i)⇔(ii) von Satz 9.16. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt von Aufgabe 7.11 a). Ist Spec(A) discret, so folgt nach Korollar 8.21 Ass(A) = Spec(A). Daher ist Spec(A) endlich, nach Korollar 8.9. □

Aufgabe 9.18. Geben Sie einen Beispiel einem noetherschen kommutativen Ring mit endlichem aber nicht diskretem Spektrum.

Korollar 9.19. *Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul und sei* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$*. Es ist der* $A_\mathfrak{p}$*-Modul* $M_\mathfrak{p}$ *nichttrivial und endlich Länge genau dann, wenn* $\mathfrak{p}$ *ein minimales Element von* Ass(M) *ist.*

Beweis. Nach Satz 8.10 ist

$$\mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing\}$$

Daher ist genau dann $\mathfrak{p}$ ein minimales an M assoziiertes Primideal, wenn $\mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ gilt. Außerdem ist $\mathrm{Ass}_A(M_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, nach Sätze 3.19 und 8.10. Schließlich, da der Ring $A_\mathfrak{p}$ lokal ist, ist ein endlich erzeugter $A_\mathfrak{p}$-Modul N endlich Länge genau dann, wenn $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ das einzige an N assoziiertes Primideal ist, nach Satz 9.16. □

Hilfsatz 9.20. *Sei* R *ein kommutativer Ring und seien* $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ *zwei Primideale, so dass* $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$ *gilt (mit* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*). So ist* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Beweis. Es ist einfach $\sqrt{\mathfrak{p}} = \sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ da $\mathfrak{p}$ prim ist. Nach Korollar 6.27 enthält ein Primideal das Ideal $\mathfrak{p}^n$ genau dann, wenn es sein Radikal $\mathfrak{p}$ enthält. □

Hilfsatz 9.21. *Sei $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ ein Endomorphismus einem A-Modul endlich Länge. Ist f injektiv, so ist f bijektiv.*

Beweis. Sei f injektiv. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{M} \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow \{0\}$$

und damit $\ell(\mathrm{M}) = \ell(\mathrm{M}) + \ell(\operatorname{coker}(f))$, nach Satz 9.13. Also ist $\ell(\operatorname{coker}(f)) = 0$. Das heißt, dass $\operatorname{coker}(f)$ selbst null ist. □

Satz 9.22. *Sei M ein endlich Länge A-Modul.*

(i) Es gibt für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$ genau einen $\mathfrak{p}$-primär Untermodul $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$. Außerdem gilt

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathrm{M}(\mathfrak{p}) = \{0\}.$$

(ii) Es existiert $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathrm{M}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^n\mathrm{M}$ für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$ gilt.

(iii) Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$ ist die kanonische Abbildung $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ surjektiv. Also gibt es eine kanonische kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{M}(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \{0\}.$$

(iv) Der kanonische Homomorphismus

$$\mathrm{M} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\mathrm{M})} \mathrm{M}/\mathrm{M}(\mathfrak{p})$$

ist bijektiv.

Beweis. Zu (i). Ist der topologischer Raum Ass(M) diskret, so ist jedes Element von Ass(M) minimal. Daher aus Sätze 8.37 und 9.16 folgt Aussage (i).
Zu (ii) und (iii). Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$. Dann gilt $\mathrm{Ass}(\mathrm{M}/\mathrm{M}(\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$. Für jedes $a \in \mathfrak{p}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathrm{M}/\mathrm{M}(\mathfrak{p})$, nach Satz 8.12. Da $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist, gibt es $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}$ so, dass $a^{n_{\mathfrak{p}}} \cdot x = 0$ für alle $a \in \mathfrak{p}$ und alle $x \in \mathrm{M}/\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ gilt. Da Ass(M) endlich ist (Korollar 8.9) existiert dann $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathfrak{p}^n\mathrm{M} \subset \mathrm{M}(\mathfrak{p})$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$. Ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M}/\mathfrak{p}^n\mathrm{M})$ so gilt $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$, somit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, nach Lemma 9.20. Da $\mathfrak{p}$ maximal ist gilt dann

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{M}/\mathfrak{p}^n\mathrm{M}) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & M/\mathfrak{p}^n M \arrow[d, "f'"] \\ M_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{p}}"] & (M/\mathfrak{p}^n M)_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

wobei f und f' die kanonische Abbildungen definiert durch $x \longmapsto \frac{x}{1}$ sind. Für jedes $a \notin \mathfrak{p}$ ist die Abbildung $x \longmapsto a \cdot x$ injektiv auf dem Quotient $M/\mathfrak{p}^n M$, nach Satz 8.12. Nach Hilsatz 9.21 ist die Multiplikation durch $a \notin \mathfrak{p}$ bijektiv auf $M/\mathfrak{p}^n M$. Das heißt, dass die Abbildung f' oben bijektiv ist. Die exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow M(\mathfrak{p}) \hookrightarrow M \xrightarrow{f} M_{\mathfrak{p}}$$

induziert die exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow M(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{1_{M_{\mathfrak{p}}}} M_{\mathfrak{p}}$$

somit $M(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \{0\}$. Aus $\mathfrak{p}^n M \subset M(\mathfrak{p})$ folgt $(\mathfrak{p}^n M)_{\mathfrak{p}} = \{0\}$. Die kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{p}^n M \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/\mathfrak{p}^n M \longrightarrow \{0\}$$

induziert die kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \{0\} \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{p}}} (M/\mathfrak{p}^n M)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \{0\}.$$

Das heißt, dass die Abbildung $\pi_{\mathfrak{p}}$ oben einen Isomorphismus ist. Insbesondere gilt $\mathfrak{p}^n M = \ker(\pi) = \ker(f) = M(\mathfrak{p})$ und die Abbildung f ist surjektiv.

Zu (iv). Falls $\mathrm{Ass}(M)$ genau ein Element $\mathfrak{p}$ hat, so gilt $M(\mathfrak{p}) = \{0\}$ und damit $M \cong M_{\mathfrak{p}}$ nach Aussage (iii). Angenommen ist $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ mit $r > 1$ und $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $M(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i^n M$ für alle i ist. Sei $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^n$. Für $i \neq j$ gilt $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ denn: ist $\mathfrak{p} \subset A$ prim mit $\mathfrak{p}_\varepsilon \subset \mathfrak{p}$ für $\varepsilon = i, j$, so gilt $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, da $\mathfrak{p}_\varepsilon$ maximal ist, im Widerspruch zu $i \neq j$. Äquivalent gilt

$$V(\mathfrak{q}_i) \cap V(\mathfrak{q}_j) = V(\mathfrak{p}_i) \cap V(\mathfrak{p}_j) = \varnothing \quad \text{für alle } j \neq i.$$

Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Es ist

$$\mathfrak{q}_i + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j = (1)$$

denn

$$V\Big(\mathfrak{q}_i + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j\Big) = V(\mathfrak{q}_i) \cap V\Big(\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j\Big) = \bigcup_{j \neq i} V(\mathfrak{q}_i) \cap V(\mathfrak{q}_j) = \varnothing.$$

Existiert dann ein Element $e_i \in A$ mit $e_i \in \mathfrak{q}_j$ für alle $j \neq i$ und $e_i - 1 \in \mathfrak{q}_i$. Die kanonische Abbildung

$$p : M \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} M/M(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{i=1}^{r} M/\mathfrak{q}_i M$$

ist injektiv, nach Aussage (i). Sei

$$(x_i)_{1 \le i \le r} \in \bigoplus_{\{1,\dots,r\}} M.$$

Wir betrachten

$$x = \sum_{i=1}^{r} e_i \cdot x_i .$$

Es ist

$$x \equiv e_i \cdot x_i \quad \text{mod. } \mathfrak{q}_i M$$

da $e_j \in \mathfrak{q}_i$ für $j \neq i$ und

$$x_i \equiv e_i \cdot x_i \quad \text{mod. } \mathfrak{q}_i M$$

für alle i da $e_i - 1 \in \mathfrak{q}_i$ ist. Das heißt, dass p surjektiv ist. □

Korollar 9.23. *Jeder noetherscher und artinscher kommutativer Ring ist isomorph zu einem endlichen Produkt lokalen artinschen Ringe.*

Beweis. Sei A ein noetherscher und artinscher kommutativer Ring. Es ist $A \cong \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} A_{\mathfrak{p}}$. □

Aufgabe 9.24. Sei K ein Körper und sei A eine K-Algebra vom endlichen Typ. Zeigen Sie, dass A genau dann artinsch ist, wenn A ganz über K ist. *Hinweis*. Benützen Sie den Korollar 9.23 und den Nullstellensatz.

Aufgabe 9.25. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring und sei $f : A \longrightarrow B$ eine kommutative A-Algebra vom endlichen Typ.

1. Wir nehmen an, dass A lokal mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist. Zeigen Sie, dass B genau dann ganz über A ist, wenn $B/\mathfrak{m}B = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A B$ ein artinscher Ring ist.

2. Wir nehmen an, dass B endlich über A ist. Zeigen Sie, dass für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{q})$ ein diskreter Unterraum von $\mathrm{Spec}(A)$ ist.

3. Wir nehmen an, dass B ganz über A ist. Zeigen Sie, dass B endlich über A ist genau dann, wenn für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ das Urbild $f^{-1}(\mathfrak{q})$ ein diskreter Unterraum von $\mathrm{Spec}(A)$ ist.

Kapitel 10

Dimension

10.1 Ketten von irreduziblen abgeschlossenen Mengen

Definition 10.1. Sei X ein topologischer Raum und sei $\ell \in \mathbb{N}$. Eine *Kette von irreduziblen abgeschlossenen Mengen der Länge* ℓ ist eine echt aufsteigende Reihe

$$X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_\ell$$

von irreduziblen abgeschlossenen Mengen in X.

Definition 10.2. Sei X ein topologischer Raum. Die *Krull-Dimension von* X ist das Supremum der Längen aller Ketten von von irreduziblen abgeschlossenen Mengen in X. Wir bezeichnen dim(X) die Krull-Dimension von X.

Definition 10.3. Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Die *Krull-Dimension* oder einfach die *Dimension* des Ringes A ist die Krull-Dimension des Raums Spec(A). Wir bezeichnen dim(A) die Dimension von A. Der Ring A ist *endlich dimensional* falls $\dim(A) < +\infty$ gilt.

Notiz 10.4. Die Dimension eines Ringes A ist das Supremum aller echt absteigenden Reihen von Primideale der Form

$$\mathfrak{p}_\ell \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_0$$

in A. Es ist $-\infty$ das Maximum einer leeren Menge in $\mathbb{N}$. Also gilt

$$\dim(A) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } A = \{0\}, \\ \max\{\ell \mid \mathfrak{p}_\ell \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_0\} \in \mathbb{N} & \text{falls A endlich dimensional mit } A \neq \{0\} \text{ ist}, \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 10.5. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring indem $0 \neq 1$. Es ist $\dim(A) = 0$ genau dann, wenn A artinsch ist: es ist eine Auslegung von Korollar 9.17 da $\dim(A) = 0$ genau dann gilt, wenn alle Primideale von A maximal sind. Insbesondere ist $\dim(K) = 0$ für alle Körpern K.

Beispiel 10.6. Es ist $\dim(A) = 1$ für alle Hauptidealringe A.

Beispiel 10.7. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper. Dann gilt $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]) \geq n$ da

$$(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n)$$

eine echt absteigende Reihe von Primideale ist. Wir wissen schon, dass $\dim(K[X]) = 1$ gilt (Beispiel 10.6). Später werden wir zeigen, dass $\dim(K[X_1,\dots,X_n]) = n$ für alle n gilt.

Aufgabe 10.8. Sei A ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass $\dim(A[X]) \geq \dim(A) + 1$ gilt.

Der folgenden Satz ist einfach.

Satz 10.9. *Sei X ein topologischer Raum und sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ist X endlich dimensional, so ist Z endlich dimensional, und es gilt* $\dim(X) \geq \dim(Z)$.

Korollar 10.10. *Sei A ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ist A endlich dimensional, so ist $A/\mathfrak{a}$ endlich dimensional, und es gilt* $\dim(A/\mathfrak{a}) \leq \dim(A)$.

10.2 Ganze Erweiterungen

Hilfsatz 10.11. *Sei $i : A \longrightarrow B$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Wir nehmen an, dass A lokal mit maximal Ideal $\mathfrak{p}$ ist und, dass $0 \neq 1$ in B gilt. Die Menge $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}$ ist genau die Menge aller maximalen Ideale in B. Insbesondere ist dieser Raum nicht leer und 0-dimensional.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal. Dann ist $A/i^{-1}(\mathfrak{q}) \longrightarrow B/\mathfrak{q}$ ein ganzer Homomorphismus. Damit ist $i^{-1}(\mathfrak{q})$ genau dann maximal wenn $\mathfrak{q}$ maximal ist, nach Satz 6.15. Da A lokal ist folgt dann, dass $i^{-1}(\mathfrak{q})$ genau dann maximal ist, wenn $i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ gilt. Sei F die Menge aller maximalen Ideale in B. Es ist F nicht leer, nach Satz 3.25. Da $\{\mathfrak{p}\}$ abgeschlossen in Spec(A) ist, so folgt, dass F abgeschlossen in Spec(B) ist. Insbesondere existiert ein Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ mit $F = V(\mathfrak{b})$. Es ist dann $\dim(F) = \dim(\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}))$. Da jedes Primideal von $B/\mathfrak{b}$ maximal ist, folgt $\dim(\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b})) = 0$. □

Satz 10.12. *Sei $i : A \longrightarrow B$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Die induzierte stetige Abbildung $i^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ hat die folgenden Eigenschaften.*

(i) Ist i injektiv, so ist i^* surjektiv.

(ii) Ist i injektiv, so sind die Fasern von i^* von Dimension Null; also ist $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}$ von Dimension Null für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.

Beweis. Zu (i). Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Es induziert ein kommutatives Diagramm von Ringe

(10.12.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[d, "b"] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "i_{\mathfrak{p}}"] & B_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

wobei a and b definiert durch $x \longmapsto \frac{x}{1}$ sind. Daher erhalten wir das folgende kommutative Diagramm von topologischen Räumen.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(B) \arrow[l, "i^*"'] \\ \mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) \arrow[u, "a^*"] & \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}) \arrow[l, "i_\mathfrak{p}^*"'] \arrow[u, "b^*"'] \end{tikzcd} \tag{10.12.2}$$

Der Ringhomomorphimus ist noch ganz und injektiv. Sei $\mathfrak{P} \subset A_\mathfrak{p}$ das maximal Ideal, so dass $a^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$ ist. Ist $\mathfrak{Q} \subset B_\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $i_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{P}$, so gilt $\mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})$, wobei $\mathfrak{q} = b^{-1}(\mathfrak{Q})$, da das Diagramm von topologischen Räumen oben kommutiert. Wir werden Zeigen, dass die Abbildung $\mathfrak{Q} \longmapsto b^{-1}(\mathfrak{Q})$ eine Bijektion

$$\{\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{P} = i_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{Q})\} \longrightarrow \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\} \tag{10.12.3}$$

ist. Wir beobachten, dass $B_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von B nach $S = i(A - \mathfrak{p})$ ist. Nach Satz 3.19 ist die Abbildung b^* injektiv. Außerdem ist ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ der Form $b^*(\mathfrak{Q})$ genau dann, wenn $i^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$ gilt (äquivalent $S \cap \mathfrak{q} = \varnothing$ gilt). Die Bijektivität von (10.12.3) ist dann klar. Aussage (i) folgt dann von Hilfsatz 10.11.

Zu (ii). Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Wir betrachten das Diagramm (10.12.2), das die Bijektion (10.12.3) induziert. Wir zeigen jetzt, dass $\dim(\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}) = 0$ gilt. Sei $Z_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\ell$ eine Kette von irreduziblen abgeschlossenen Mengen in $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}$. Für jedes Index j betrachten wir das Urbild W_j von Z_j durch der Bijektion (10.12.3). Sei $\mathfrak{Q}_j \in W_j$ und sei $\mathfrak{q}_j = b^{-1}(\mathfrak{Q}_j)$. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\{\mathfrak{q}_j\}$ irreduzibel und abgeschlossen. Daher gilt

$$W_j = V(\mathfrak{Q}_j) \cap \{\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{P} = i_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{Q})\} \cong V(\mathfrak{q}_j) \cap \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\} = Z_j$$

für jedes j, da die Bijektion (10.12.3) vereinbar mit Inklusionen von Primideale ist, nach Satz 3.19. Alle Elemente von W_j sind maximale Ideale, nach Hilfsatz 10.11. Daher gilt

$$\{\mathfrak{Q}_j\} = V(\mathfrak{Q}_j) \cap \{\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{P} = i_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{Q})\}$$

und damit, durch der Bijektion (10.12.3),

$$\{\mathfrak{q}_j\} = V(\mathfrak{q}_j) \cap \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}.$$

Also gilt $Z_j = \{\mathfrak{q}_j\}$ für jedes j, somit $\ell = 0$. □

Korollar 10.13. *Sei* $i : A \longrightarrow B$ *ein ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist die induzierte Abbildung* $i^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *abgeschlossen; genauer, für jedes Ideal* $\mathfrak{b} \subset B$ *gilt* $i^*(V(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{a})$, *wobei* $\mathfrak{a} = i^{-1}(\mathfrak{b})$ *ist.*

Beweis. Der Homomorphismus induziert einen Homomorphismus $j : A/\mathfrak{a} \longrightarrow B/\mathfrak{b}$, der ganz und injektiv ist. Nach Aussage (i) von Satz 10.12 ist die induzierte Abbildung

$$i^*_{|V(\mathfrak{b})} : V(\mathfrak{b}) \cong \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \cong V(\mathfrak{a})$$

surjektiv. Daher gilt $V(\mathfrak{a}) = i^*(V(\mathfrak{b}))$. □

Hilfsatz 10.14. *Sei* $i : A \longrightarrow B$ *ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Wir betrachten eine echt aufsteigende Reihe von Primideale* $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ *in* A. *Dann existiert eine echt aufsteigende Reihe von Primideale* $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_r$ *in* B *mit* $\mathfrak{p}_j = i^{-1}(\mathfrak{q}_j)$ *für alle* j.

Beweis. Wir beweisen induktiv über r. Für $r = 0$ ist es genau Aussage (i) von Satz 10.12. Angenommen ist $r > 0$. Dann existiert eine echt aufsteigende Reihe von Primideale $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_{r-1}$ in B mit $\mathfrak{p}_j = i^{-1}(\mathfrak{q}_j)$ für alle $j < r$. Korollar 10.13 mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_{r-1}$ zeigt, dass es ein Primideal $\mathfrak{q}_r \subset B$ mit $\mathfrak{q}_{r-1} \subset \mathfrak{q}_r$ und $\mathfrak{p}_r = i^{-1}(\mathfrak{q}_r)$ gibt. Es ist $\mathfrak{q}_{r-1} \neq \mathfrak{q}_r$ denn sonst würde $\mathfrak{p}_{r-1} = \mathfrak{p}_r$ gelten. □

Satz 10.15. *Sei* B *ein kommutativer Ring und sei* $A \subset B$ *ein Unterring. Angenommen ist* B *ganz über* A. *Der Ring* A *ist genau dann endlich dimensional, wenn der Ring* B *endlich dimensional ist. Außerdem gilt* $\dim(A) = \dim(B)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal. Es ist das Bild der irreduziblen abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{q})$ in $\mathrm{Spec}(A)$ der irreduziblen abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})$ ist. Außerdem, sind $\mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{q}$ zwei Primideale in B und sind $\mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{p}' = i^{-1}(\mathfrak{q}')$, so gilt $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$: angenommen $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, aus der echte Inklusion $\mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{q}$ folgt $\dim(\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathfrak{p} = i^{-1}(\mathfrak{q})\}) \geq 1$, im Widerspurch zu Aussage (ii) von Satz 10.12. Daher, ist A endlich dimensional, so ist B endlich dimensional mit $\dim(B) \leq \dim(A)$. Umgekehrt, nach Hilfsatz 10.14, ist B endlich dimensional, so ist A endlich dimensional und $\dim(A) \leq \dim(B)$. □

Satz 10.16. *Sei* K *ein Körper und sei* A *eine* K*-Algebra vom endlichen Typ. Sei* $n \in \mathbb{N}$ *so, dass es existiert* $x_1, \ldots, x_n \in A$ *mit* $K[x_1, \ldots, x_n] = A$. *Dann ist* $\dim(A) \leq n$.

Beweis. Wir beweisen induktiv über n. Ist $n = 0$, so ist $A = \{0\}$ oder $K = A$ und es gibt nichts zu tun. Sei $n > 0$ und sei

$$\varphi : B = K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$$

eine surjektiver K-Algebrenhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine echt aufsteigende Reihe von Primideale in A. Wir betrachten $\mathfrak{q}_j = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_j)$ für jedes j. Es ist dann $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_r$ eine echt aufsteigende Reihe von Primideale in B. Insbesondere existiert ein $F \in \mathfrak{q}_1$ nicht konstant. Nach dem Lemma von Nagata (6.22) existiert $Y_2, \ldots, Y_n \in B$ mit B ganz über $C = K[F, Y_2, \ldots, Y_n]$. Also ist die K-Algebra $B/\mathfrak{q}_1 \cong A/\mathfrak{p}_1$ ganz über $B' = C/C \cap \mathfrak{q}_1$. Es ist $B' = K[y_2, \ldots, y_n]$ mit y_i die Restklasse von Y_i. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\dim(B') \leq n - 1$. Nach Satz 10.15 gilt dann $\dim(A/\mathfrak{p}_1) \leq n - 1$. Da $\{0\} \subsetneq \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r/\mathfrak{p}_1$ eine echt aufsteigende Reihe von Primideale in $A/\mathfrak{p}_1$ ist folgt $r - 1 \leq n - 1$. Daher gilt $r \leq n$. □

Korollar 10.17. *Sei* K *ein Körper. Dann gilt* $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]) = n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $\dim(K[X_1,\dots,X_n]) \geq n$ nach Beispiel 10.7. Nach Satz 10.16 gilt die Vergleichung $\dim(K[X_1,\dots,X_n]) \leq n$. □

Korollar 10.18. *Jede Algebra dem endlichen Typ über einen Körper ist endlich dimensional.*

10.3 Der Transzendenzgrad

10.19. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Seien $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von A. Dann gilt

$$\dim(A) = \max_{1\leq i\leq n} \dim(A/\mathfrak{p}_i).$$

Um die Dimension von A zu bestimmen ist es dann genug die Dimension von Integritätsringe zu verstehen. Wir werden es tun im Fall von Algebren dem endlichen Typ über einen Körper.

Definition 10.20. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Eine *Transzendenzbasis von* L *über* K ist eine Teilmenge $B \subset L$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) jede endliche Teilmenge $I \subset B$ bildet ein algebraisch unabhängiges System über K (Definition 6.19);

(b) L ist algebraisch über den Unterkörper K(B) erzeugt von $K \cup B$.

Aufgabe 10.21. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und sei $B \subset L$ so, dass jede endliche Teilmenge von B ein algebraisch unabhängiges System über K bildet. Zeigen Sie: ein Element $x \in L - B$ ist genau dann transzendent (also nicht algebraisch) über K(B), wenn jede endliche Teilmenge von $B \cup \{x\}$ ein algebraisch unabhängiges System über K ist.

Hilfsatz 10.22. *Sei* $K \subset L$ *eine Körpererweiterung. Sei* $B \subset L$ *endlich mit* $L = K(B)$ *und sei* $E \subset B$. *Sei* $F \subset B$ *maximal mit der Eigenschaft, dass* F *ein algebraisch unabhängiges System über* K *mit* $E \subset F$ *ist. Dann ist* F *eine Transzendenzbasis über* K.

Beweis. Sei $x \in B$ mit $x \notin K(F)$. Nach der maximalität von F und der Aufgabe oben ist x algebraisch über K(F). Da $L = K(B)$ folgt dann, dass L algebraisch über K(F) ist. □

Satz 10.23. *Sei* $K \subset L$ *eine Körpererweiterung. Angenommen gibt es endlich viele Element* $x_1,\dots,x_r$ *in* L *mit* $L = K(x_1,\dots,x_r)$. *Dann besitzt* L *mindestens eine endliche Transzendenzbasis über* K. *Außerdem haben zwei Transzendenzbasen von* L *über* K *gleiche Mächtigkeiten.*

Beweis. Jedes maximale algebraisch unabhängige System $B \subset \{x_1,\dots,x_r\}$ bildet eine Transzendenzbasis von L über K. Seien B und B′ zwei Transzendenzbasen von L über K, mit B endlich. Sei N die Mächtigkeit von B und sei M die Mächtigkeit von $B \cap B'$. Wir werden induktiv über $n = N - M$ beweisen. Ist $n = 0$, so gilt $B \subset B'$ und damit gilt $B = B'$. Angenommen ist $n > 0$. Sei

$b \in B' - B$. Dann ist $B \cup \{b\}$ keine Transzendenzbasis von L über K. Sei $B_0 \subset B \cup \{b\}$ maximal mit der Eigenschaft

$$(B \cap B') \cup \{b\} \subset B_0 \subsetneq B \cup \{b\}.$$

Daher ist B_0 eine Transzendenzbasis von L über K. Sei N_0 die Mächtigkeit von B_0. Dann ist $N_0 - M < n$. Daher, nach der Induktionsvoraussetzung ist B' endlich mit Mächtigkeit $N_0 \leq N$. Da B und B' symmetrische Rollen haben gilt $N \leq N_0$. □

Definition 10.24. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Falls L eine endliche Transzendenzbasis B von L über K besitzt sagen wir, dass L *vom endlichen Typ über* K (als Körpererweiterung) ist. Wir bezeichnen dann $\mathrm{degTr}_K(L)$ den Transzendenzgrad von L über K, also die Mächtigkeit von B.

Satz 10.25. *Sei* K *ein Körper und sei* A *eine integre* K*-Algebra dem endlichen Typ. Dann ist den Quotientenkörper* K(A)*. Dann ist die Körpererweiterung* $K \subset K(A)$ *vom endlichen Typ und*

$$\dim(A) = \mathrm{degTr}_K(K(A)).$$

Beweis. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz gibt es ein algebraisch unabhängiges System $x_1, \ldots, x_n \in A$ über K mit A ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$. Nach Satz 10.15 und Korollar 10.17 ist $\dim(A) = n$. Sei $S = K[x_1, \ldots, x_n] - \{0\}$. Dann ist $S^{-1}A = K(A)$, da $S^{-1}A$ ganz über den Körper $K(x_1, \ldots, x_n) = S^{-1}K[x_1, \ldots, x_n]$ und damit ein Körper selbst ist (Satz 6.15). Also ist K(A) algebraisch über $K(x_1, \ldots, x_n)$. Das zeigt, dass $n = \mathrm{degTr}_K(A))$ gilt. □

Korollar 10.26. *Sei* K *ein Körper und sei* $A = K[X_1, \ldots, X_n]/(F)$ *mit* $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ *nicht konstant. Dann gilt* $\dim(A) = n - 1$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ eine Kette von Primideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $(F) \subset \mathfrak{p}_1$. Dann erhalten wir eine Kette von Primideale $(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ der Lange ℓ. Also ist $\ell \leq n$. Das Zeigt, dass $\dim(A) \leq n - 1$ ist. Wir zeigen $\dim(A) \geq n - 1$ induktiv über n. Es ist $\dim(A)$ das Maximum von aller $\dim(K[X_1, \ldots, X_n]/(P))$ wobei P jedes Primfaktor von F ist. Ohne Einschränkung ist F irreduzibel. Falls $n = 1$, so ist A ein Körper, nach dem Nullstellensatz. Insbesondere gilt $\dim(A) = 0 = 1 - 1$. Sei $n > 1$. Ist $F \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, so gilt $A = A'[X_n]$ mit $A' = K[X_1, \ldots, X_{n-1}]/(F)$. Aus der Induktionsvoraussetzung gilt $\dim(A') = n - 2$. Es ist $\dim A'[X_n] \geq \dim(A') + 1$. Damit gilt $\dim(A) \geq n - 1$. Falls $F \notin K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ist die Komposition

$$K[X_1, \ldots, X_{n-1}] \subset K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$$

injektiv. Es ist A ein Integritätsring da F irreduzibel ist, und $\mathrm{degTr}_K(K(A)) \geq n - 1$ gilt. Aus Satz 10.25 folgt $\dim(A) \geq n - 1$. □

10.4 Höhe

Es ist A ein kommutativer Ring.

Definition 10.27. Die *Höhe* einem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist die Dimension von der Lokalisierung $\dim(A_{\mathfrak{p}})$. Man bezeichnet $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$.

Notiz 10.28. Nach Satz 3.19 ist die Höhe von $\mathfrak{p}$ das Maximum aller $\ell \in \mathbb{N}$ so, dass es eine echt absteigende Reihe von Primideale der Form

$$\mathfrak{p}_\ell \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$$

gibt. Es ist

$$\dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \dim(A).$$

Wir werden die Möglichkeit zu einer Gleichung untersuchen.

Beispiel 10.29. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \subset K^2$ die Vereinigung von einer Gerade ℓ und einem Punkt $p \notin \ell$. Sei $A = K[X,Y]/\mathfrak{I}$, wobei $\mathfrak{I} \subset K[X,Y]$ das Ideal von Polynome f mit $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in F$ ist. Dann gilt $\dim(A) = 1$. Trotzdem ist das maximale Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{I}$ minimal. Damit gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$. Da $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(K[X,Y]/\mathfrak{m}_p) = \dim(K) = 0$ gilt $0 = \dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \dim(A) = 1$.

Hilfsatz 10.30. *Angenommen ist A faktoriell. Ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist der Höhe 1 genau dann, wenn es ein irreduzibles Element $a \in A$ mit $(a) = \mathfrak{p}$ gibt.*

Beweis. Sei $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Es existiert $a \in \mathfrak{p}$ irreduzibel. Da $(0) \subsetneq (a) \subset \mathfrak{p}$ eine Kette von Primideale ist folgt $(a) = \mathfrak{p}$. Umgekehrt, sei $a \in A$ irreduzibel. Sei $\mathfrak{q} \neq (0)$ ein Primideal enthaltet in (a). Es existiert $b \in \mathfrak{q}$ irreduzibel. Da $b \in (a)$ ist a ein Teiler von b. Damit gibt es eine Einheit $u \in A^\times$ mit $b = u \cdot a$. Daher ist $(b) = \mathfrak{q} = (a)$. Das zeigt, dass $\mathrm{ht}((a)) = 1$ gilt. □

Hilfsatz 10.31. *Sei A faktoriell und sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung mit B ein Integritätsring. Seien a und b teilerfremde Elemente von A und sei $c \in B$ so, dass a ein Teiler von $b \cdot c$ in B ist. Dann existiert $n \in \mathbb{N}_{>0}$ so, dass a ein Teiler von c^n ist.*

Beweis. Sei K der Quotientenkörper von A. Wir beobachten, dass A ganz abgeschlossen in K ist (Aufgabe 6.18): für jedes $x \in K$, existiert $p \in A[X]$ normiertet mit $p(x) = 0$, so gilt $x \in A$. Das Element c ist algebraisch über K da es ganz über A ist. Sei p das minimale Polynom von c über K: es ist $p \in K[X]$ normiertet mit $p(c) = 0$ und

$$K[X]/(p) \cong K[c] = K(c)$$

durch $f \longmapsto f(c)$. Wir werden erst zeigen, dass $p \in A[X]$ gilt. Sei $K(c) \subset L$ eine Zerfällungskörper von p. Wir betrachten der Unterring A' von L erzeugt von A und die Nullstellen von p. Da c

ganz über A gibt es ein normiertes Polynom $q \in A[X]$ mit $q(c) = 0$. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L, K)$ ist $q(\sigma(c)) = \sigma(q(c)) = 0$. Also ist jede Nullstelle von p ganz über A. Daher ist der Ring A' ganz über A (Korollar 6.12). Aber $p \in A'[X]$ als Produkt

$$p = \prod_{\alpha \in A',\ p(\alpha)=0} (X - \alpha).$$

Insbesondere ist jedes Koeffizient von p in K und ganz über A. Damit gilt $p \in A[X]$. Sei

$$p = X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n$$

mit jedes $a_i \in A$. Nach Voraussetzung ist jetzt a ein Teiler von $b \cdot c$. Sei $d \in B$ mit $a \cdot d = b \cdot c$ und sei

$$q = X^n + b_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \cdot X + b_n$$

mit $b_i = \left(\frac{b}{a}\right)^i \cdot a_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q(d) &= d^n + \frac{b}{a} \cdot a_1 \cdot d^{n-1} + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \cdot a_{n-1} \cdot d + \left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot a_n \\
&= \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^n + \frac{b}{a} \cdot a_1 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \cdot a_{n-1} \cdot \frac{b \cdot c}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot a_n \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot p(c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $K(d) = K(c)$ und daher $[K(d) : K] = \deg(q)$. Somit ist q das minimale Polynom von d über K. Aber $d \in B$ ist ganz über A. Wie oben folgt, dass $q \in A[X]$ ist. Also gilt $b_i \in A$ mit $a^i \cdot b_i = b^i \cdot a_i$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Insbesondere ist a ein Teiler von $b^i \cdot a_i$ in A für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da a und b teilerfremd sind folgt, dass a ein Teiler von jedes a_i in A ist. Schließlich , aus

$$p(c) = c^n + a_1 \cdot c^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot c + a_n = 0$$

folgt dann, dass a ein Teiler von c^n in B ist. □

Satz 10.32. *Sei* K *ein Körper und* A *eine integre* K*-Algebra vom endlichen Typ. Für alle* $\mathfrak{p} \in A$ *gilt*

$$\dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A).$$

Beweis. Wir beweisen induktiv über $n = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Ist $n = 0$, so gilt $\mathfrak{p} = (0)$ und alles ist klar. Sei $n = 1$. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz existiert algebraisch unabhängiges System $x_1 \ldots, x_r \in A$ über K mit A ganz über $B = K[x_1, \ldots, x_r]$. Es ist $\dim(A) = r$ und $B \cap \mathfrak{p} \neq (0)$ da

$$\dim(B/B \cap \mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{p}) < \dim(A) = \dim(B) = r.$$

Wir werden zeigen, dass $\mathrm{ht}(B \cap \mathfrak{p}) = 1$ gilt. Sei $f \in B$ irreduzibel mit $f \in \mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{q} = (f) \subset \mathfrak{p}$ ein Primideal von B der Höhe 1, nach Hilfsatz 10.30. Nach Korollar 10.26 gilt dann

$$\dim(B/\mathfrak{q}) = r - 1\,.$$

Sei $\mathfrak{a}$ das Ideal von A erzeugt von $\mathfrak{q}$ (also von f). Es ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{a}) = 0$ da $(0) \subsetneq \mathfrak{a}$ und $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ gilt. Es ist dann $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ ein minimales Ideal von $A/\mathfrak{a}$. Insbesondere ist $\mathfrak{p}$ ein an $A/\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal. Nach Satz 8.37 ist der $\mathfrak{p}$-primäre Untermodul $\mathfrak{I}$ in der Primärzerlegung von $A/\mathfrak{a}$ genau der Kern von der kanonischen Abbildung:

$$A/\mathfrak{a} \longrightarrow (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}\,.$$

Also gibt es ein Ideal $\mathfrak{r} \subset A$, das $\mathfrak{a}$ enthält, so dass $\mathfrak{r}/\mathfrak{a} = \mathfrak{I}$ ist. Da $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{r}) = \{\mathfrak{p}\}$ gilt, existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $x^m \in \mathfrak{r}$ für alle $x \in \mathfrak{p}$ (Anwendung von Satz 8.12 mit $M = A/\mathfrak{r}$). Wir werden zeigen, dass $B \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{q} = (f)$ gilt. Sei $b \in B \cap \mathfrak{r}$. Dann gibt es $s \notin \mathfrak{p}$ mit $s \cdot b \in \mathfrak{a}$. Also ist f ein Teiler von b in A denn: wäre f kein Teiler von b, nach Hilfsatz 10.31, so würde f ein Teiler von einer Potenz von s, und somit würde $\mathfrak{p}$ eine Potenz von s enthalten, im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{p}$. Schließlich können wir jetzt zeigen, dass $B \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ gilt. Sei $b \in B \cap \mathfrak{p}$. Dann ist $b^m \in B \cap \mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{q}$ prim ist, so folgt $b \in \mathfrak{q}$. Es ist jetzt $B/\mathfrak{q} \subset A/\mathfrak{p}$ eine ganze Erweiterung und somit gilt

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(B/\mathfrak{q}) = r - 1 = \dim(A) - 1\,.$$

Ist $n > 1$, so können wir eine echt aufsteigende Reihe von Primideale der Form

$$\{0\} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

wählen. Es ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$ ein Primideal der Höhe $n-1$ in $A/\mathfrak{p}_1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$\dim(A/\mathfrak{p}) + n - 1 = \dim(A/\mathfrak{p}_1)\,.$$

Es ist jetzt genug zu zeigen, dass

$$\dim(A/\mathfrak{p}_1) + 1 = \dim(A)$$

gilt. Aber $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1) = 1$ gilt, sodass dies aus dem Fall $n = 1$ folgt. □

Aufgabe 10.33. Sei K ein Körper und sei A eine integre K-Algebra vom endlichen Typ. Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so bezeichnen wir

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = \min_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathrm{ht}(\mathfrak{p})\,.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\dim(A/\mathfrak{a}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = \dim(A)\,.$$

Kapitel 11

Regularität

11.1 Filtrationen

Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul.

Definition 11.1. Eine Folge von Untermoduln der Form

$$\cdots \subset M_{n+1} \subset M_n \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

heißt eine *Filtration* von M.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Die Filtration $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine $\mathfrak{a}$-*Filtration*, falls die Inklusion $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1}$ gilt für alle n.

Eine $\mathfrak{a}$-Filtration heißt $\mathfrak{a}$-*stabil*, falls $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für n groß genug.

Beispiel 11.2. Es ist $(\mathfrak{a}^n M)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathfrak{a}$-stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von M.

Notiz 11.3. Je Filtration von M definiert eine Topologie auf M: eine Teilmenge $U \subset M$ is geöffnet, falls für jedes $x \in U$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in U$ für alle $y \in M$ so, dass $x - y \in M_n$ gilt.

Definition 11.4. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Die $\mathfrak{a}$-*adische* Topologie auf M ist die Topologie induziert aus der Filtration $(\mathfrak{a}^n M)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notiz 11.5. Beide Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen von $A \times A$ nach A bezüglich der $\mathfrak{a}$-*adische* Topologie (und die $\mathfrak{a}$-*adische* Topologie auf $A \times A$ ist die Produkt-Topologie induziert aus der $\mathfrak{a}$-*adische* Topologie auf A).

Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathfrak{a}$-Filtration von M, so sind die Addition $M\times M \longrightarrow M$ und die Skalar-Multiplikation $A \times M \longrightarrow M$ stetig (mit der $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf A).

Hilfsatz 11.6. *Sei* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Filtration von* M.

(i) Die abgeschlossene Hülle von $\{0\}$ *in* M *ist der Durchschnitt aller Untermoduln* M_n.

(ii) Es ist M *Hausdorffsch genau dann, wenn*

$$\{0\} = \bigcap_{n\geq 0} M_n$$

gilt.

Beweis. Zu (i). Für jedes $x \in M$, gilt genau dann $x \in \overline{\{0\}}$, wenn jede Umgebung von x das Element 0 enthält. Insbesondere ist $\overline{\{0\}}$ enthält im Durchschnitt aller Untermoduln der Form M_n. Sei $x \in M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in U$ falls $y - x \in M_n$ gilt. Insbesondere ist $0 \in U$ denn $0 - x \in M_n$ gilt.

Zu (ii). Ist M Hausdorffsch, so ist $\{x\}$ abgeschlossen für alle $x \in M$. Insbesondere gilt $\{0\} = \bigcap_{n\geq 0} M_n$, nach Aussage (i). Umgekehrt, sei $\{0\}$ der Durchschnitt aller M_n, und seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann existiert $n \geq 0$ mit $x - y \notin M_n$. Also ist $(x + M_n) \cap (y + M_n) = \varnothing$, mit $x + M_n$ bzw. $y + M_n$ eine Umgebung von x bzw. von y. □

Hilfsatz 11.7. *Die Topologie induzierte von einer* $\mathfrak{a}$*-stabilen Filtration ist die* $\mathfrak{a}$*-adische Topologie.*

Beweis. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathfrak{a}$-stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von M. Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für $n \geq m$. Es ist genug zu zeigen, dass $M_{m+n} \subset \mathfrak{a}^n M \subset M_n$ für alle $n \geq 0$ gilt. Wir beweisen induktiv über n. Die zweite Inklusion gilt nach Definiton von $\mathfrak{a}$-Filtration. Für $n = 0$ ist $M_m \subset M$. Sei $n > 0$. Es ist $M_{m+n-1} \subset \mathfrak{a}^{n-1}M$ nach Induktionsvoraussetzung. Daher gilt $M_{m+n} = \mathfrak{a}M_{m+n-1} \subset \mathfrak{a}^n M$. □

Definition 11.8. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration von M. Eine *Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\geq 0}$ ist eine Folge von Elementen in M so, dass für jede Umgebung U von 0 in M es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in U$ falls $m, n \geq n_0$ existiert.

Wir bezeichnen C(M) die Menge von Cauchy-Folgen und $C_0(M)$ die Menge von Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 0$. Beide C(M) und $C_0(M)$ sind Untermoduln von dem Produkt $M^{\mathbb{N}}$. Die A-lineare Abbildung

$$p : M \longrightarrow \widehat{M} = C(M)/C_0(M),$$

die $x \in M$ zu der Restklasse der konstanten Folge $(x)_{n\geq 0}$ sendet heißt die *kanonische Projektion*. Der A-Modul heißt die *Vervollständigung von* M.

Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die $\mathfrak{a}$*-adische Vervollständigung von* M ist Vervollständigung bezüglich der $\mathfrak{a}$-adische Filtration $(\mathfrak{a}^n M)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notiz 11.9. Die Konstruktion $\widehat{M}$ hängt nur von der Topologie auf M ab. Nicht von der Filtration.

Aufgabe 11.10. Für jede $n \in \mathbb{N}$ sei $\widehat{M}_n = p(M_n)$. Das Urbild von $\widehat{M}_n$ in C(M) ist die Menge von Cauchy-Folgen $(x_i)_{i\geq 0}$ so, dass es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_i \in M_n$ für alle $i \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Filtration $(\widehat{M}_n)_{n\geq 0}$ eine Topologie auf $\widehat{M}$ mit folgenden Eigenschaften induziert:

(a) Die kanonische Abbildung $p : M \longrightarrow \widehat{M}$ ist stetig mit Kern

$$\ker(p) = \bigcap_{n\geq 0} M_n .$$

(b) Jede Cauchy-Folge ist konvergent in $\widehat{M}$.

(c) Der Raum $\widehat{M}$ is Hausdorffsch.

Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. Es ist M Hausdorffsch genau dann, wenn die Abbildung p injektiv ist.

2. Alle Cauchy-Folgen sind konvergent in M genau dann, wenn p surjektiv ist.

Beispiel 11.11. Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim. Die p-adische Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ ist die (p)-adische Vervollständigung. Man bezeichnet sie $\mathbb{Z}_p$. Die Elemente von $\mathbb{Z}_p$ heißen die *p-adischen Zahlen*.

Aufgabe 11.12. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ ein lokaler Hauptidealring ist.

Definition 11.13. Ein *Inverses System* von A-Moduln $M_\bullet$ ist ein Diagramm der Form

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_n} M_n \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0$$

wobei M_n ein A-Modul und f_n eine A-lineare Abbildung ist.
Ein *Morphismus von inversen Systemen* $\varphi_\bullet : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ ist eine Familie von A-linearen Abbildungen $\varphi_n : M_n \longrightarrow N_n$, $n \geq 0$, so, dass jedes Quadrat

$$\begin{array}{ccc} M_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & N_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_n & \xrightarrow{\varphi_n} & N_n \end{array}$$

kommutiert.

Definition 11.14. Sei $M_\bullet$ ein inverses System von A-Moduln. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ von Elemente $x_n \in M_n$ ist *kohärent* falls $f_n(x_{n+1}) = x_n$ für jedes $n \geq 0$. Man bezeichnet

$$\varprojlim_n M_n \subset \prod_{n\geq 0} M_n$$

den Untermoduln von kohärenten Elementen im Produkt aller M_n. Wir betrachten $\varprojlim_n M_n$ als topologischer Modul bezüglich die Topologie induziert aus der Produkt-Topologie auf $\prod_{n\geq 0} M_n$, mit der diskreten Topologie auf jedem M_n.

Notiz 11.15. Es gibt eine exakte Sequenz links der Form

$$\{0\} \longrightarrow \varprojlim_n M_n \xrightarrow{i} \prod_{n\geq 0} M_n \xrightarrow{id_M - V} \prod_{n\geq 0} M_n$$

wobei i die Inklusionsabbildung ist, mit V die Verschiebung:

$$V((x_n)_{n\geq 0}) = (f_n(x_{n+1}))_{n\geq 0}.$$

Satz 11.16. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von inversen Systemen; das heißt, dass $\varphi_\bullet$ und $\psi_\bullet$ Morphismen von inversen Systemen sind, sodass

$$\{0\} \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} N_n \xrightarrow{\psi_n} P_n \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A*-Moduln für jede $n \geq 0$ ist. Angenommen ist $M_{n+1} \longrightarrow M_n$ surjektiv für alle $n \geq 0$. Dann gibt es eine kanonische exakte Sequenz der Form:*

$$\{0\} \longrightarrow \varprojlim_n M_n \longrightarrow \varprojlim_n N_n \longrightarrow \varprojlim_n P_n \longrightarrow \{0\}.$$

Beweis. Wir betrachten den folgende Morphismus von exakten Sequenzen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & \prod_{n\geq 0} M_n & \xrightarrow{\prod_{n\geq 0}\varphi_n} & \prod_{n\geq 0} N_n & \xrightarrow{\prod_{n\geq 0}\psi_n} & \prod_{n\geq 0} P_n & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle id_M - V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id_N - V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id_P - V} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & \prod_{n\geq 0} M_n & \xrightarrow{\prod_{n\geq 0}\varphi_n} & \prod_{n\geq 0} N_n & \xrightarrow{\prod_{n\geq 0}\psi_n} & \prod_{n\geq 0} P_n & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma und nach Notiz 11.15 ist es genug zu zeigen, dass die Abbildung

$$id_M - V : \prod_{n\geq 0} M_n \longrightarrow \prod_{n\geq 0} M_n$$

surjektiv ist. Sei $x = (x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $x_n \in M_n$ für alle n. Wir definieren $y_n \in M_n$ induktiv über n. Sei $y_0 = 0$. Wir wählen für jede $n \geq 0$ ein Element $y_{n+1} \in M_{n+1}$ mit $f_n(y_{n+1}) = y_n - x_n$. Dann gilt $y - V(y) = x$ mit $y = (y_n)_{n\geq 0}$. □

Satz 11.17. *Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration von* M*. Sie induziert ein inverses System*

$$\cdots \xrightarrow{p_{n+1}} M/M_{n+1} \xrightarrow{p_n} M/M_n \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_1} M/M_1 \xrightarrow{f_0} M/M_0 = \{0\}$$

wobei p_n die Restklasse von x modulo M_{n+1} zu seiner Restklasse modulo M_n sendet. Es gibt dann ein kanonischer Isomorphismus topologischer Moduln[1]

$$\widehat{M} \cong \varprojlim_n M/M_n.$$

Beweis. Sei $n \geq 0$. Die kanonische Projektion $M \longrightarrow M/M_n$ ist stetig bezüglich die diskrete Topologie auf M/M_n. Jede Cauchy-Folge in M/M_n ist stationär. Daher gilt

$$M/M_n \cong \widehat{M/M_n} = C(M/M_n)/C_0(M/M_n).$$

Somit induziert die Projektion $M \longrightarrow M/M_n$ eine stetige surjektive lineare Abbildung

$$q_n : \widehat{M} \longrightarrow M/M_n,$$

[1] Ein Isomorphismus von Moduln, der ein Homöomorphismus auch ist.

die die Restklasse einer Cauchy-Folge $(x_i)_{i\geq 0}$ zu der Restklasse von x_i für i groß genug sendet. Wir definieren

$$q : \widehat{M} \longrightarrow \varprojlim_n M/M_n$$

durch $q(x) = (q_n(x))_{n\geq 0}$. Wir werden zeigen, dass q ein Isomorphismus topologischer Moduln ist. Sei $(x_i)_{i\geq 0}$ eine Folge in M so, dass $x_{i+1} - x_i \in M_i$ für alle i gilt. Dann ist $(x_i)_{i\geq 0}$ eine Cauchy-Folge und $q(x)$ ist die Folge von Restklassen von x_i modulo M_i. Also ist q surjektiv. Zur injektivität beobachten wir erst, dass die Abbildung $p : M \longrightarrow \widehat{M}$ die Gleichung

$$p^{-1}(\widehat{M}_n) = M_n$$

induziert. Also induziert p eine injektive lineare Abbildung

$$M/M_n \longrightarrow \widehat{M}/\widehat{M}_n .$$

Die letzte Abbildung ist surjektiv auch, denn: ist $(x_i)_{i\geq 0}$ eine Cauchy-Folge, so ist $x_i - x_j \in M_n$ für i, j groß genug; also ist die Restklasse von $(x_i)_{i\geq 0}$ gleich die Restklasse von x_i für i groß genug. Damit gilt

$$\varprojlim_n M/M_n \cong \varprojlim_n \widehat{M}/\widehat{M}_n .$$

Da die Topologie auf $\widehat{M}$ Hausdorffsch ist folgt, dass die kanonische Abbildung

$$\widehat{M} \longrightarrow \varprojlim_n M/M_n \cong \varprojlim_n \widehat{M}/\widehat{M}_n$$

injektiv ist, nach Hilfsatz 11.6. Da q vereinbar mit Filtrationen ist folgt, dass q ein Homöomorphismus ist. □

Korollar 11.18. *Sei* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal und sei*

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A*-Moduln. Angenommen ist die* $\mathfrak{a}$*-Filtration* $(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}^n N))_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{a}$*-stabil. Dann gibt es eine kanonische kurze exakte Sequenz von* $\mathfrak{a}$*-adischen Vervollständigungen:*

$$\{0\} \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{P} \longrightarrow \{0\}.$$

Beweis. Für jede $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine kanonische kurte exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow M/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}^n N) \longrightarrow N/\mathfrak{a}^n N \longrightarrow P/\mathfrak{a}^n P \longrightarrow \{0\}$$

Nach Satz 11.16 bekommen wir eine kurze exakte Sequenz der folgenden Form.

$$\{0\} \longrightarrow \varprojlim_n M/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}^n N) \longrightarrow \varprojlim_n N/\mathfrak{a}^n N \longrightarrow \varprojlim_n P/\mathfrak{a}^n P \longrightarrow \{0\}$$

Nach Satz 11.17 ist es jetzt genug zu zeigen, dass $\varprojlim_n M/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}^n N)$ die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung von M ist. Dies folgt direkt aus Hilfsatz 11.7 und Notiz 11.9. □

Aufgabe 11.19. Sei R ein kommutativer Ring. Wir definieren den Ring R[[X]] von *Potenzreihen* in der Variabel X mit Koeffizienten in R wie folgt. Ein element von R[[X]] ist eine Folge $f = (a_n)_{n\geq 0}$ in R bezeichnet

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n.$$

Sind $f = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n$ und $g = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot X^n$ zwei Potenzreihen, so ist die Summe $f+g$ definiert komponentenweise

$$f + g = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) \cdot X^n$$

und das Produkt

$$f \cdot g = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot X^n$$

durch

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass R[[X]] die (X)-adische Vervollständigung von R[X] ist.

(ii) Sei $\mathfrak{a} \subset R[[X]]$ ein Ideal. Für $f = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n \in \mathfrak{a}$ betrachten wir:

a) Die kleinste natürliche Zahl $o(f) = n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$.

b) Das Element $c(f) = a_n \in R$ wobei $n = o(f)$.

Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{a}_n = \{c(f) \mid f \in \mathfrak{a},\ o(f) = n\} \cup \{0\}$$

für jede n ein Ideal von R ist.

(iii) Angenommen ist R noethersch. Das Ziel ist zu zeigen, dass R[[X]] noethersch ist. Sei $\mathfrak{a} \subset R[[X]]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass es eine $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ gibt. Seien $g_1, \ldots, g_r \in R[[X]]$ so, dass für jede $k \leq n_0$, es $E_k \subset \{g_1, \ldots, g_r\}$ mit $\mathfrak{a}_k$ erzeugt von E gibt. Wir betrachten $\mathfrak{b} = (g_1, \ldots, g_n)$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathfrak{a}$ es $g \in \mathfrak{b}$ mit $o(f) = o(g)$ und $c(f) = c(g)$ gibt.

b) Sei $f \in \mathfrak{a}$. Konstruieren Sie Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$ in $\mathfrak{a}$ und $(g_n)_{n\geq 0}$ in $\mathfrak{b}$ mit $f_0 = f$ so, dass $f_{n+1} = f_n - g_n$ für alle n gilt. Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 0} g_n$ in R[[X]] konvergent ist. Zeigen Sie, dass $f = \sum_{n\geq 0} g_n$ gilt und, dass f ein Element von $\mathfrak{b}$ ist.

(iv) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass K[[X]] ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (X) ist.

11.2 Das Artin-Reessche Lemma

Definition 11.20. Ein *gewichteter Ring* ist ein kommutativer Ring A zusammen mit Untergruppen $A_n \subset A$ (bezüglich Addition) für jede $n \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$.

(ii) Für $a \in A_m$ und $b \in A_n$ gilt $a \cdot b \in A_{m+n}$.

Beispiel 11.21. Sei R ein kommutativer Ring. Dann ist $A = R[X_1, \ldots, X_k]$ gewichtet mit A_n der freie R-Modul erzeugt von Elementen der Form $X_1^{n_1} \cdots X_k^{n_k}$ so, dass $\sum_{i=1}^k n_i = n$ gilt.

Definition 11.22. Sei $A = \bigoplus_n A_n$ ein gewichteter Ring. Ein *gewichteter* A-*Modul* ist ein A-Modul M zusammen mit Untergruppen $M_n \subset M$ (bezüglich Addition) für jede $n \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$.

(ii) Für $a \in A_m$ und $x \in M_n$ gilt $a \cdot x \in M_{m+n}$.

Satz 11.23. *Ein gewichteter Ring* A *ist genau dann noethersch, wenn die zwei folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Der Ring A_0 *ist noethersch.*

(ii) Der Ring A *ist eine* A_0*-Algebra von endlichem Typ.*

Beweis. Ist A eine A_0-Algebra von endlichem Typ und ist A_0 noethersch, so ist A noethersch, nach dem Hilbertschen Basissatz (5.5) (und Aufgabe 5.14). Umgekehrt, angenommen ist A noethersch. Dann ist $A_0 = A/\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n>0} A_n$. Daher ist A_0 noethersch (als A-Modul und dann als Ring). Außerdem ist $\mathfrak{a}$ erzeugt von endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_r$ als A-modul. Ohne Einschränkung ist $x_i \in A_{n_i}$ für $n_i \in \mathbb{N}$. Sei $x \in A_n$ mit $n > 0$. Dann gibt es $a_i \in A_{n-n_i}$ so, dass

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i$$

gilt. Induktiv über n beobachten wir, dass $x \in A_0[x_1, \ldots, x_r]$ gilt. Daher folgt $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$ und A ist eine A_0-Algebra endlichem Typ. □

Definition 11.24. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal von einem kommutativen Ring. Dann heißt der gewichtete Ring

$$A^* = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n$$

der *Reessche Ring von* A *bezüglich* $\mathfrak{a}$.

Notiz 11.25. Ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, so ist A^* eine A-Algebra von endlichem Typ; genauer, bilden $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{a}$ eine erzeugende Familie, so gilt $A^* = A[x_1, \ldots, x_r]$. Außerdem gilt $\mathfrak{a}^0 = A$. Daher ist A noethersch genau dann, wenn A^* noethersch ist, nach Satz 11.23.

Satz 11.26. *Sei* A *noethersch und* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal. Man betrachtet eine* $\mathfrak{a}$*-Filtration* $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *von einem endlich erzeugten* A*-Modul* M. *Das induziert ein* A^**-Modul* $M^* = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ *durch die Skalarmultiplikation*

$$\mathfrak{a}^m \times M_n \longrightarrow M_{m+n}\,, \quad (a, x) \longmapsto a \cdot x\,.$$

Der A^**-Modul* M^* *ist genau dann endlich erzeugt, wenn die* $\mathfrak{a}$*-Filtration* $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{a}$*-stabil ist.*

Beweis. Angenommen ist die $\mathfrak{a}$-Filtration $\mathfrak{a}$-stabil. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_n = \mathfrak{a}^{n-n_0} M_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt, dass M^* erzeugt von $N = M_0 \oplus \cdots \oplus M_{n_0}$ als A^*-Modul ist. Da N endlich erzeugt als A-Modul ist folgt dann, dass M^* endlich erzeugt als A^*-Modul ist.
Umgekehrt, sei M^* endlich erzeugt. Da A^* noethersch ist folgt, dass M^* noethersch ist. Wir betrachten die A^*-Untermoduln $S_n \subset M^*$ erzeugt von $M_0 \oplus \cdots \oplus M_n$ für jede $n \in \mathbb{N}$. Es gibt dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $S_{n+1} = S_n$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere gilt

$$M_{n+1} = S_{n+1} \cap M_{n+1} = S_n \cap M_{n+1} \subset \mathfrak{a} M_n\,.$$

Damit gilt $M_{n+1} = \mathfrak{a} M_n$ für $n \geq n_0$. □

Satz 11.27 (Lemma von Artin-Rees). *Sei* A *ein kommutativer noetherscher Ring und sei* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal. Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Für jeden Untermodul* $N \subset M$ *ist die induzierte* $\mathfrak{a}$*-Filtration* $(N \cap \mathfrak{a}^n M)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{a}$*-stabil.*

Beweis. Es ist $N^* = \bigoplus_{n \geq 0} N \cap \mathfrak{a}^n M$ ein A^*-Untermodul von $M^* = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n M$. Nach Satz 11.26 ist M^* endlich erzeugt über den noethersche Ring A^*. Daher ist N^* noethersch als A^*-Modul. Nach einer neuen Anwendung von Satz 11.26 ist dann die $\mathfrak{a}$-Filtration $(N \cap \mathfrak{a}^n M)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{a}$-stabil. □

Korollar 11.28. *Sei* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal von einem Noetherschen Ring und sei*

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A*-Moduln. Dann gibt es eine kanonische kurze exakte Sequenz von* $\mathfrak{a}$*-adischen Vervollständigungen:*

$$\{0\} \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \widehat{P} \longrightarrow \{0\}\,.$$

Beweis. Folgt von Korollar 11.18 und von dem Artin-Reesschen Lemma. □

Korollar 11.29 (Krull)**.** *Sei* A *ein Noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m} \subset A$. *Für jeden endlich erzeugte* A*-Modul* M *gilt*

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n M = \{0\}.$$

Beweis. Sei $N = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n M$. Es ist $\mathfrak{m}^n M \cap N = N$ eine $\mathfrak{m}$-stabile $\mathfrak{m}$-Filtration. Daher existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n N = N$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt $\mathfrak{m}N + \{0\} = N$ mit N endlich erzeugt. Nach dem Krull-Nakayama-Lemma (4.15) gilt dann $N = \{0\}$. □

Aufgabe 11.30 (Krullscher Satz)**.** Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul mit $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung $\widehat{M}$. Zeigen Sie, dass der Kern der kanonischen Abbildung $M \longrightarrow \widehat{M}$ genau aus den $x \in M$ mit $\operatorname{Ann}(x) \cap (1 + \mathfrak{a}) \neq \varnothing$ besteht. *Hinweis.* Benützen Sie Aufgaben 4.18 und 11.10 zusammen mit dem Lemma von Artin-Rees.

Aufgabe 11.31. Sei A ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

  a) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ gilt $M_{\mathfrak{m}} = \{0\}$.

  b) Es ist $\mathfrak{a}M = M$.

(ii) Zeigen Sie, das die folgende Gleichung gilt

$$\bigcap_{n>0} \mathfrak{a}^n M = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}} \ker\left(M \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}\right),$$

wobei jede Abbildung $M \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}$ die kanonische Abbildung ist. *Hinweis*. Benützen Sie (i) zusammen mit Krullschem Satz (Aufgabe 11.30).

(iii) Sei $\widehat{M}$ die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung von M. Zeigen Sie:

$$\widehat{M} = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{a}) = \varnothing.$$

Aufgabe 11.32. Sei A ein noetherscher Ring mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Sei $f : A \longrightarrow \widehat{A}$ die kanonische Abbildung nach der $\mathfrak{a}$-adischen Vervollständigung von A. Seien $x_1, \ldots, x_r \in A$ mit $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$. Sei $\varphi : A[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow A$ die Abbildung definiert durch $\varphi(p) = p(x_1, \ldots, x_r)$. Wir definieren $A[[X_1, \ldots, X_r]]$ induktiv über r durch $A[[X_1, \ldots, X_r]] = \big(A[[X_1, \ldots, X_{r-1}]]\big)[[X_r]]$ (Aufgabe 11.19).

(i) Zeigen Sie, dass $A[[X_1, \ldots, X_r]]$ die $(X_1, \ldots, X_r)$-adische Vervollständigung von $A[X_1, \ldots, X_r]$ ist. Zeigen Sie, dass es genau eine stetige Ringhomomorphismus $\psi : A[[X_1, \ldots, X_r]] \longrightarrow \widehat{A}$ gibt so, dass das folgendes Quadrat kommutiert.

$$\begin{tikzcd} A[X_1, \ldots, X_r] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & A[[X_1, \ldots, X_r]] \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "f"] & \widehat{A} \end{tikzcd}$$

(ii) Zeigen Sie, dass ψ surjektiv ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\widehat{A}$ noethersch ist.

11.3 Poincarésche Reihe

11.33. Es ist $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ein gewichteter Ring mit folgenden Eigenschaften:

(i) Der Ring A_0 ist noethersch und artinsch.

(ii) Es gibt endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_d \in A_1$ mit $A = A_0[x_1, \ldots, x_d]$. Insbesondere ist A eine A_0-Algebra von endlichem Typ, und daher ein noethercher Ring.

Sei $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Dann ist M_n ein endlich erzeugter A_0-Modul für jede n. Insbesondere ist M_n ein Modul endlicher Länge für jede n.

Definition 11.34. Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Die *Poincarésche Reihe von* M ist

$$\chi(M) = \sum_{n \geq 0} \ell(M_n) \cdot t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Definition 11.35. Seien M und N zwei gewichteten A-Moduln. Ein *gewichtete A-lineare Abbildung* $f : M \longrightarrow N$ ist eine A-lineare Abbildung so, dass $f(x) \in N_i$ für jede $x \in M_i$ gilt. Eine kurze exakte Sequenz bzw. exakte Sequenz rechts bzw. exakte Sequenz links von gewichteten A-Moduln ist eine kurze exakte Sequenz bzw. exakte Sequenz rechts bzw. exakte Sequenz links von A-Moduln, wobei jede Abbildung eine gewichtete A-lineare Abbildung zwischen gewichteten A-Moduln ist.

Satz 11.36. *Es sei*

$$\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten gewichteten A-Moduln. Dann gilt

$$\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'').$$

Beweis. Für jede $n \in \mathbb{N}$ ist eine kurze exakte Sequenz von endlichen Länge A_0-Moduln

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \longrightarrow M_n \longrightarrow M''_n \longrightarrow \{0\}$$

somit gilt $\ell(M_n) = \ell(M'_n) + \ell(M''_n)$, nach Satz 9.13. □

Satz 11.37 (Hilbert-Serre). *Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Es gibt $P \in \mathbb{Z}[t]$ mit*

$$\chi(M) = \frac{P(t)}{(1-t)^d}$$

(wobei d aus Aussage (ii) in 11.33 kommt).

Beweis. Wir beweisen induktiv über d. Sei $d = 0$. Dann ist $A = A_0$ und $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ ist endlich erzeugt als A_0-Modul. Also existiert $n_0 \geq 0$ mit $M_n = \{0\}$ für $n \geq n_0$. Damit gilt $\ell(M_n) = 0$ für $n \geq n_0$ und $\chi(M) \in \mathbb{Z}[t]$. Sei $d > 0$. Man betrachtet den gewichtete A-Modul

$$M[-1] = \bigoplus_{n\geq 0} M_{n-1}$$

mit $M_{-1} = \{0\}$. Es ist

$$\chi(M[-1]) = t \cdot \chi(M).$$

Sei $\varphi : M[-1] \longrightarrow M$ die gewichtete A-lineare Abbildung definiert durch $\varphi(y) = x_1 \cdot y$. Das induziert eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow K \longrightarrow M[-1] \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow Q \longrightarrow \{0\}$$

oder äquivalent zwei kurze exakte Sequenzen von endlich erzeugten gewichteten A-Moduln

$$\{0\} \longrightarrow K \longrightarrow M[-1] \longrightarrow \mathrm{im}(\varphi) \longrightarrow \{0\}$$

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{im}(\varphi) \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow \{0\}$$

und damit, nach Satz 11.36 (zwei mal):

$$\begin{aligned}
\chi(Q) - \chi(K) &= \chi(M) - \chi(\mathrm{im}(\varphi)) - \big(\chi(M[-1]) - \chi(\mathrm{im}(\varphi))\big) \\
&= \chi(M) - \chi(M[-1]) \\
&= (1-t) \cdot \chi(M).
\end{aligned}$$

Sei $A' = A/(x_1)$. Dies ist ein gewichteter Ring mit

$$A' = A_0 \oplus \bigoplus_{n\geq 1} A_n/(x_1 \cdot A_{n-1}) \quad \text{und} \quad A' = A_0[\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_d],$$

wobei $\bar{x}_i$ die Restklasse von x_i für jedes $i > 0$ ist. Außerdem sind K und Q Moduln über A'. Daher, nach Induktionsvoraussetzung existieren $F, G \in \mathbb{Z}[t]$ mit

$$\chi(K) = \frac{F(t)}{(1-t)^{d-1}} \quad \text{und} \quad \chi(Q) = \frac{G(t)}{(1-t)^{d-1}}.$$

Mit $P(t) = G(t) - F(t)$ erhalten wir $\frac{P(t)}{(1-t)^{d-1}} = (1-t) \cdot \chi(M)$. □

Hilfsatz 11.38. *Für eine Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definieren wir $\Delta(\varphi) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch $\Delta(\varphi)(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$. Sei $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

(i) Es ist f eine Polynomfunktion (das heißt es gibt $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $f(n) = P(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$).

(ii) Es ist $\Delta(f)$ eine Polynomfunktion.

(iii) *Es gibt* $r \in \mathbb{N}$ *mit* $\Delta^r(f) = \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{r\ mal}(f) = 0$.

Beweis. Zu (i)⇒(ii). Sei $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $f(n) = P(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$Q(t) = P(t+1) - P(t) \in \mathbb{Q}[t]$$

mit $\Delta(f)(n) = Q(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Zu (ii)⇒(iii). Sei $P \in \mathbb{Q}[t]$. Es ist $\Delta(P) = P(t+1) - P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ mit Grad $< \deg(P)$. Also gilt $\Delta^r(P) = 0$ für $r \in \mathbb{N}$ groß genug.

Zu (iii)⇒(i). Angenommen ist f nicht null (sonst würde es nichts zu tun). Sei $d \in \mathbb{N}$ maximal mit $\Delta^d(f) \neq 0$. Wir beweisen induktiv über d, dass f eine Polynomfunktion vom Grad d ist. Ist $d = 0$, so ist $\Delta(f) = 0$ somit f konstant und nicht null ist. Sei $d > 0$. Dann gibt es $Q \in \mathbb{Q}[t]$ vom Grad $d-1$ mit $\Delta(f) = Q(t)$, nach Induktionsvoraussetzung. Also gibt es $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Q}$ mit

$$f(n+1) - f(n) = a_0 + a_1 \cdot n + \cdots + a_{d-1} \cdot n^{d-1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ist $P \in \mathbb{Q}[t]$ des Grades d, so gilt die Taylor-Formel:

$$P(t+1) - P(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{P^{(i)}(t)}{i!}.$$

Es gibt ein solches P mit $\Delta(P) = Q$ (nachrechnen). Also gilt

$$\Delta(f - P)(n) = \Delta(f)(n) - \Delta(P)(n) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dass heißt, dass $f - P$ eine konstante Funktion ist. Daher ist $f = (f - P) + P$ eine Polynomfunktion vom Grad d. □

Hilfsatz 11.39. *Sei* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *eine Abbildung. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

(i) *Es gibt* $n_0 \in \mathbb{N}$ *und ein Polynom* $P \in \mathbb{Q}[t]$ *mit* $f(n) = P(n)$ *für alle* $n \geq n_0$.

(ii) *Es gibt* $n_0 \in \mathbb{N}$ *und ein Polynom* $P \in \mathbb{Q}[t]$ *mit* $f(n+1) - f(n) = P(n)$ *für alle* $n \geq n_0$.

(iii) *Es gibt* $r, n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $\Delta^r(f)(n) = 0$ *für alle* $n \geq n_0$.

Beweis. Zu (i)⇒(ii). Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $f(n) = P(n)$ für $n \geq n_0$. Es gibt $r \geq 0$ mit $\Delta^r(P) = 0$. Somit gilt $\Delta^r(f) = \Delta^r(P)(n) = 0$ für $n \geq n_0$.

Zu (ii)⇒(iii). Ist P ein Polynom, so ist $\Delta^r(P) = 0$ für r groß genug.

Zu (iii)⇒(i). Seien $r, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\Delta^r(f)(n) = 0$ für alle $n \geq n_0$. Sei d maximal mit $\Delta^d(f)(n) \neq 0$ mindestens für ein $n \geq n_0$. Ist $d \leq 0$, so ist f konstant nach n_0. Sei $d > 0$. Dann gibt es $Q \in \mathbb{Q}[t]$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $Q(n) = \Delta(f)(n)$ für $n \geq n_1$. Wir wählen $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\Delta(P) = Q$. Dann ist $f - P$ konstant nach n_1. □

Hilfsatz 11.40. *Sei $g(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ und $d \in \mathbb{N}$ so, dass $(1-t)^d \cdot f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ gilt. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass die Abbildung $n \longmapsto a_n$ eine Polynomfunktion des Grades $\leq d-1$ in der Variabel $n \geq n_0$ ist.*

Beweis. Wir beweisen induktiv über d. Ist $d = 0$, so ist g ein Polynom und $a_n = 0$ für n groß genug. Sei $d > 0$. Wir bezeichnen $a(n) = a_n$ für $n \geq 0$ und $a(-1) = 0$. Es ist

$$(1-t) \cdot g(t) = -\sum_{n \geq 0} \Delta(a)(n) \cdot t^n .$$

Also gilt

$$(1-t)^{d-1} \cdot \sum_{n \geq 0} \Delta(a)(n) \cdot t^n \in \mathbb{Z}[t].$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\Delta(a)$ eine Polynomfunktion nach einer $n_1 \in \mathbb{N}$. Nach Hilfsatz 11.39 ist dann $n \longmapsto a_n$ eine Polynomfunktion nach einer $n_0 \in \mathbb{N}$. □

Korollar 11.41. *Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass die Abbildung $n \longmapsto \ell(M_n)$ eine Polynomfunktion des Grades $\leq d-1$ in der Variabel $n \geq n_0$ ist.*

Beweis. Nach dem Satz von Hilbert-Serre gilt $(1-t)^d \cdot \chi(M) \in \mathbb{Z}[t]$. Dieses Korollar folgt dann aus Hilfsatz 11.40. □

Aufgabe 11.42. Sei A ein gewichteter Ring mit A_0 noethersch und artinsch. Angenommen gibt es $x_i \in A_{r_i}$ für $1 \leq i \leq d$ so, dass $A = A_0[x_1, \dots, x_d]$ gilt. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie, dass

$$\chi(M) \cdot \prod_{i=1}^{d} (1 - t^{r_i}) \in \mathbb{Z}[t]$$

gilt.

Satz 11.43. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, und sei d Mindestanzahl so, dass es ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ der Form $x_1, \dots, x_d$ gibt. Sei M ein endlich erzeigt A-Modul.*

(i) Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n \longmapsto \ell(M/\mathfrak{q}^n M)$ eine Polynomfunktion des Grades $\leq d$ in der Variabel $n \geq n_0$ ist.

(ii) Der Grad dieser Polynomfunktion hängt nicht von $\mathfrak{q}$ ab.

Beweis. Zu (i). Man betrachtet den gewichtete Ring

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^{n+1} .$$

Sei $x_1, \dots, x_d$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{q}$ mit Restklassen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ modulo $\mathfrak{q}^2$. Dann gilt

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(A) = (A/\mathfrak{q})[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d].$$

Zum A-Modul M is assoziiert den gewichtete $\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(A)$-Modul

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n M / \mathfrak{q}^{n+1} M.$$

Der Ring $A/\mathfrak{q}$ ist noethersch und artinsch (nach Aufgabe 8.27 und Korollar 9.17). Aus dem Korollar 11.41 ist die Abbildung $n \longmapsto \ell(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M)$ polynomial für n groß genug, vom Grad $\leq d-1$. Sei $f(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^n M)$. Es gibt kanonischen exakten Sequenzen der Form

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{q}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{q}^n M \longrightarrow \{0\}$$

und somit, nach Satz 9.13, Gleichungen

$$\Delta(f)(n) = f(n+1) - f(n) = \ell(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M).$$

Nach Hilfsatz 11.39 existiert dann $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass f eine Polynomfunktion vom Grad $\leq d$ für $n \geq n_0$ ist.

Zu (ii). Es gibt $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ (Aufgabe 8.27). Daher gilt

$$\mathfrak{m}^{rn} M \subset \mathfrak{q}^n M \subset \mathfrak{m}^n M$$

für alle $n \geq 0$. Wir erhalten surjektiven A-linearen Abbildungen

$$M/\mathfrak{m}^{rn} M \longrightarrow M/\mathfrak{q}^n M \longrightarrow M/\mathfrak{m}^n M$$

und somit, nach Satz 9.13, Vergleichungen

$$\ell(M/\mathfrak{m}^{rn} M) \geq \ell(M/\mathfrak{q}^n M) \geq \ell(M/\mathfrak{m}^n M).$$

Seien $P, Q \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\ell(M/\mathfrak{m}^n M) = P(n)$ und $\ell(M/\mathfrak{q}^n M) = Q(n)$ für n groß genug. Dann gelten die Vergleichungen $P(rn) \geq Q(n) \geq P(n)$ für n groß genug. Daher gilt

$$\deg(P(rt)) \geq \deg(Q(t)) \geq \deg(P(t)).$$

Da $\deg(P(rt)) = \deg(P(t))$ folgt $\deg(Q(t)) = \deg(P(t))$. $\square$

Definition 11.44. Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. Für jeden endlich erzeugte A-Modul M definieren das *charakteristische Polynom von* $\mathfrak{q}$ *über* M (also ernannt als das *Hilbertsche Polynom von* $\mathfrak{q}$ *über* M) ist das Polynom $P_{\mathfrak{q}}(M)$ bestimmt durch

$$P_{\mathfrak{q}}(M)(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^n M)$$

für $n >> 0$. Für $M = A$ heißt einfacher $P_{\mathfrak{q}}(A)$ das *charakteristische Polynom von* $\mathfrak{q}$, oder das *Hilbertsche Polynom von* $\mathfrak{q}$.

Satz 11.45. *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$. *Sei* $\delta(A) \in \mathbb{N}$ *minimal so, dass mindestens ein* $\mathfrak{m}$*-primäre Ideal erzeugt von* $\delta(A)$ *Elemente ist. Für alle* $\mathfrak{m}$*-primären Ideale* $\mathfrak{q} \subset A$ *gilt*

$$\deg(P_{\mathfrak{q}}(A)) = \deg(P_{\mathfrak{m}}(A)) \leq \delta(A).$$

Beweis. Da $\deg(P_{\mathfrak{q}}(A))$ nicht von $\mathfrak{q}$ hängt ab (Aussage (ii) von Satz 11.43), ohne Einschränkung ist $\mathfrak{q}$ erzeugt von $\delta(A)$ Elemente. Aus Aussage (i) von Satz 11.43 gilt dann $\delta(A) \leq \deg(P_{\mathfrak{q}}(A))$. □

11.4 Die Dimension von lokalen noetherschen Ringen

Satz 11.46 (Dimensionssatz)**.** *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$. *Dann ist* A *endlich dimensional. Außerdem sind die drei folgenden Zahlen gleich.*

(i) Die Dimension $\dim(A)$.

(ii) Die Mindestanzahl $\delta(A)$ *so, dass es ein von* $\delta(A)$ *Elemente erzeugtes* $\mathfrak{m}$*-primäres Ideal gibt.*

(iii) Der Grad $d(A)$ *vom Hilbertschen Polynom* $P_{\mathfrak{m}}(A)$.

Hilfsatz 11.47. *Sei* $x \in \mathfrak{m}$ *kein Nullteiler. Dann gilt* $d(A/(x)) \leq d(A) - 1$.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \longrightarrow A/(x) \longrightarrow \{0\}$$

wobei f definiert durch $f(a) = x \cdot a$ ist. Sei $I_n = f^{-1}(\mathfrak{m}^n)$ für jede $n \geq 0$. Also ist I_n das Ideal von Elemente $a \in A$ mit $x \cdot a \in \mathfrak{m}^n$. Insbesondere gilt $\mathfrak{m}^n \subset I_n$. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz für jede n der From:

$$\{0\} \longrightarrow A/I_n \longrightarrow A/\mathfrak{m}^n \longrightarrow A/(x, \mathfrak{m}^n) \longrightarrow \{0\}.$$

Daher ist A/I_n von endlicher Lange, und die Abbildung $n \longmapsto \ell(A/I_n)$ ist polynomial für n groß genug: es gibt $Q \in \mathbb{Q}[t]$ mit $Q(n) = \ell(A/I_n)$ für n groß genug. Außerdem ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathfrak{m}$-stabile $\mathfrak{m}$-Filtration, nach dem Lemma von Artin-Rees: es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_n = \mathfrak{m}^{n-n_0} I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$; also gilt

$$\mathfrak{m}^n \subset I_n \subset \mathfrak{m}^{n-n_0}$$

für alle $n \geq n_0$, somit

$$P_{\mathfrak{m}}(A)(n) \geq Q(n) \geq P_{\mathfrak{m}}(A)(n - n_0)$$

für alle n groß genug. Es folgt, dass $\deg(Q) = d(A)$ und, dass $P_{\mathfrak{m}}(A)$ und Q gleichen Leitkoeffizienten haben. Es ist außerdem

$$\ell(A/(x, \mathfrak{m}^n)) = \ell(A/\mathfrak{m}^n) - \ell(A/I_n)$$

für alle $n \geq 0$, und daher

$$\mathrm{P}_{(x,\mathfrak{m})}(\mathrm{A}/(x)) = \mathrm{P}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A}) - \mathrm{Q}\,.$$

Es folgt dann, dass $d(\mathrm{A}/(x)) \leq d(\mathrm{A}) - 1$ gilt. □

Hilfsatz 11.48. *Sei* R *ein kommutativer Ring und sei* $\mathfrak{a} \subset \mathrm{R}$ *ein Ideal. Sind* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ *Primideale mit* $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$, *so existiert* i *mit* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$.

Beweis. Wir beweisen induktiv über r. Ist $r = 1$, so gibt es nichts zu beweisen. Sei $r > 1$. Angenommen ist $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ für alle i. Es ist dann für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$

$$\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$$

denn sonst, nach Induktionsvoraussetzung, würde $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein $i \neq j$ gelten. Für jedes j existiert $x_j \in \mathfrak{a}_j$ mit $x_j \notin \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$. Aber dann gilt $x_j \in \mathfrak{p}_j$ für alle j. Sei $y = x_1 + x_2 \cdots x_r \in \mathfrak{a}$. Es gibt i mit $y \in \mathfrak{p}_i$. Ist $i = 1$, so ist $x_2 \cdots x_r \in \mathfrak{p}_1$. Dann existiert $j \neq 1$ mit $x_j \in \mathfrak{p}_1$, im Widerspruch zu $x_j \notin \mathfrak{p}_1$ für $j \neq 1$. Also ist $i \neq 1$. Aber dann gilt $x_1 = y - x_2 \cdots x_r \in \mathfrak{p}_i$, auch im Widerspruch zu $x_1 \notin \mathfrak{p}_i$ für $1 \neq i$. □

Beweis von Satz 11.46. Wir werden $d(\mathrm{A}) \leq \delta(\mathrm{A}) \leq \dim(\mathrm{A}) \leq d(\mathrm{A})$. beweisen.

• *Zu* $\dim(\mathrm{A}) \leq d(\mathrm{A})$. Wir beweisen diese Vergleichung induktiv über $d(\mathrm{A})$. Sei $d(\mathrm{A}) = 0$. Dann ist die Abbildung $n \longmapsto \ell(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$ konstant für n groß genug. Aus der exakten Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+k} \longrightarrow \mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+k} \longrightarrow \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n \longrightarrow \{0\}$$

folgt

$$\ell(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+k}) = \ell(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+k}) + \ell(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$$

für alle $n, k \geq 0$. Das zeigt, dass, für n groß genug, $\ell(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+k}) = 0$ für alle $k \geq 0$ gilt. Äquivalent ist $\mathfrak{m}^{n+k} = \mathfrak{m}^n$. Das heißt, dass für n groß genug

$$\mathfrak{m}^n = \bigcap_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k$$

gilt. Nach Korollar 11.29 ist dann $\mathfrak{m}^n = \{0\}$ für n groß genug. Also ist das Nullideal $\mathfrak{m}$-primär und A ist artinsch, somit von Dimension Null. Sei $d(\mathrm{A}) > 0$. Sei jetzt eine Kette von Primideale

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$$

in A. Sei $x \in \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_0$. Die Restklasse $\bar{x}$ von x in $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathfrak{p}_0$ ist kein Nullteiler (nicht null in einem Integritätsring). Sei $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von B. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n \longrightarrow \mathrm{B}/\mathfrak{n}^n$$

surjektiv für alle n. Damit ist

$$\ell(\mathrm{B}/\mathfrak{n}^n) \leq \ell(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n).$$

Es folgt $P_{\mathfrak{n}}(B)(n) \leq P_{\mathfrak{m}}(A)(n)$ für n groß genug und somit $d(B) \leq d(A)$. Nach Lemma 11.47 gilt $d(B/(\bar{x})) \leq d(B)-1 \leq d(A)-1$. Daher, nach Induktionsvoraussetzung ist $B/(\bar{x})$ endlich dimensional mit $\dim(B/(\bar{x})) \leq d(B/(\bar{x}))$. Es ist

$$\mathfrak{p}_1/(\bar{x}) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell/(\bar{x})$$

eine Kette von Primideale in $B/(\bar{x})$. Daher gilt $\ell - 1 \leq d(B/(\bar{x})) \leq d(A) - 1$. Äquivalent ist $\ell \leq d(A)$. Das heißt, dass A endlich dimensional mit $\dim(A) \leq d(A)$ ist.

• *Zu* $\delta(A) \leq \dim(A)$. Wir beweisen induktiv über $\dim(A)$. Ist $\dim(A) = 0$, so ist A artinsch und das Nullideal ist $\mathfrak{m}$-primär. Insbesondere gilt $\delta(A) = 0$. Sei jetzt $\dim(A) > 0$. Wir werden induktiv über $i \in \{0, \ldots, \dim(A)\}$ ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A$ konstruieren so, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt werden:

(a) Das Ideal $\mathfrak{a}_i$ ist erzeugt von i Elemente.

(b) Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ gilt die Vergleichung $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq i$.

Für $i = 0$ betrachten wir $\mathfrak{a}_0 = (0)$. Sei $0 < i \leq \dim(A)$. Sei E die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}_{i-1} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = i - 1$. Es ist $E \subset \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a}_{i-1})$ und daher ist E endlich. Es ist für jedes $\mathfrak{p} \in E$

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = i - 1 < \dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}).$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ für ein solches $\mathfrak{p}$. Es ist

$$\mathfrak{m} \neq \bigcup_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p}$$

da sonst, nach Lemma 11.48, existierte ein $\mathfrak{p} \in E$ mit $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, und somit $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, im Widerspruch zu $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = i - 1 < \dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. Daher gibt es $x \in \mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in E$. Wir definieren $\mathfrak{a}_i = (x) + \mathfrak{a}_{i-1}$. Da $\mathfrak{a}_{i-1}$ erzeugt von $i-1$ Elemente ist folgt Eigenschaft (a) oben. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{a}_{i-1} \subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq i - 1$. Es ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) > i - 1$ da sonst würde x kein Element von $\mathfrak{p}$ sein. Somit Eigenschaft (b). Falls $n = \dim(A)$ ist, dann ist der Ring $A/\mathfrak{a}_n$ lokal und artinsch: es gibt genau ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe $n = \dim(A)$, tatsächlich $\mathfrak{m}$ selbst, so dass $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}_n) = \{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}_n\}$ gilt. Äquivalent ist dann das Ideal $\mathfrak{a}_n$ $\mathfrak{m}$-primär. Daher gilt $\delta(A) \leq n = \dim(A)$.

• *Zu* $d(A) \leq \delta(A)$. Folgt aus Satz 11.45. □

Korollar 11.49. *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$, *und* $k = A/\mathfrak{m}$. *Dann gilt*

$$\dim(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Beweis. Der k-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist endlich erzeugt, da er noethersch ist. Seien $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ so, dass die Restklassen $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d$ modulo $\mathfrak{m}^2$ eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden. Nach dem Lemma von Krull-Nakayama (tatsächlich nach Korollar 4.16) ist $x_1, \ldots, x_d$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Daher ist $\dim(A) \leq d$, nach Satz 11.46. □

Korollar 11.50. *Sei* A *ein noetherscher kommutativer Ring. Seien* $x_1, \dots, x_r \in A$ *und sei* $\mathfrak{p}$ *minimal in* $\mathrm{Ass}(A/(x_1, \dots, x_r))$*. Dann gilt* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis. Es ist $(x_1, \dots, x_r) \subset \mathfrak{p}$ und

$$(x_1, \dots, x_r)_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_r}{1}\right) \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}.$$

Außerdem ist $\mathfrak{p}$ minimal in $\mathrm{Ass}(A_{\mathfrak{p}}/(x_1, \dots, x_r)_{\mathfrak{p}})$. Dass heißt, dass das Ideal $(x_1, \dots, x_r)_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$-primär ist. Also gilt $r \geq \dim(A_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. □

Aufgabe 11.51. Sei A ein noetherscher Ring mit einem maximale Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $f : A \longrightarrow \widehat{A}$ die kanonische Abbildung nach der $\mathfrak{m}$-adischen Vervollständigung von A. Es ist $\widehat{A}$ ein noetherscher Ring (Aufgabe 11.32). Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

1) Der Ring $\widehat{A}$ ist lokal mit maximalem Ideal $\widehat{\mathfrak{m}}$ (die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung von $\mathfrak{m}$ selbst). *Hinweis.* Sei $x \notin \widehat{\mathfrak{m}}$. Zeigen Sie, dass es $y \in \widehat{A}$ und $z \in \widehat{\mathfrak{m}}$ mit $x \cdot y = 1 - z$ gibt; Bestimmen Sie ein explizites Inverse von $1 - z$.

2) Zeigen Sie, dass $\widehat{A}$ kanonisch isomorph zu der $(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$-adischen Vervollständigung von $A_{\mathfrak{m}}$ ist.

3) Angenommen ist jetzt A lokal. Zeigen Sie, dass $P_{\mathfrak{m}}(A) = P_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{A})$ ist. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\dim(A) = \dim(\widehat{A})$ gilt.

Satz 11.52 (Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring und sei* $x \in A$ *kein Nullteiler oder eine Einheit.*

(i) Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/(x))$ *minimal gilt* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

(ii) Es ist $\dim(A/(x)) = \dim(A) - 1$.

Beweis. Zu (i). Nach dem Korollar oben folgt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/(x))$ minimal. Angenommen gibt es $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/(x))$ minimal mit $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$. Dann ist $A_{\mathfrak{p}}$ artinsch mit Hauptideal $(x)_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}$, da $x \in \mathfrak{p}$ gilt. Da eine Potenz von $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ null ist, folgt es, dass $\frac{x}{1}$ nilpotent in $A_{\mathfrak{p}}$ ist: es existiert $n > 0$ und $s \notin \mathfrak{p}$ mit $s \cdot x^n = 0$, im Widerspruch zu x kein Nullteiler zu sein.
Zu (ii). Es ist $\dim(A/(x)) \leq \dim(A) - 1$ nach Hilfsatz 11.47 und Satz 11.46. Da x keine Einheit ist, existieren $\mathfrak{m}/(x)$-primären Idealen in $A/(x)$. Seien $x_1, \dots, x_r \in A$ so, dass die zugehörigen Restklassen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ in $A/(x)$ ein $\mathfrak{m}/(x)$-primäres Ideal erzeugen. Dann ist $\mathfrak{a} = (x, x_1, \dots, x_r)$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und somit gilt $r + 1 \geq \delta(A) = \dim(A)$. Es ist möglich $r = \delta(A/(x))$ zu wählen. Daher ist $\dim(A/(x)) = \delta(A/(x)) \geq \dim(A) - 1$. □

Korollar 11.53. *Sei* A *ein noetherscher integrer lokaler Ring mit maximalen Ideal* $\mathfrak{m}$*. Für alle* $x \in \mathfrak{m} - \{0\}$ *gilt* $\dim(A/(x)) = \dim(A) - 1$.

Beweis. Es ist $x \neq 0$ kein Nullteiler da A ein Integritätsring ist. Es ist $x \in \mathfrak{m}$ keine Einheit. Wir anwenden dann den Krullsche Hauptidealsatz. □

Satz 11.54. *Sei* K *ein Körper und* A *eine integre* K*-Algebra von endlichem Typ. Sei* $f \in A - \{0\}$ *keine Einheit. Dann gilt*

$$\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1\,.$$

Beweis. Sei $E \subset \mathrm{Ass}(A/(f))$ die endliche Menge aller minimalen zu $A/(f)$ assoziierten Primidealen. Es ist

$$\dim(A/(f)) = \min\{\dim(A/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in E\}.$$

Sei $\mathfrak{p}_0 \in E$ mit

$$\dim(A/\mathfrak{p}_0) = \dim(A/(f)) = n\,.$$

Wir wählen eine Kette von Primidealen der Form

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n\,.$$

Dann gilt

$$(A/(f))_{\mathfrak{q}} \cong A_{\mathfrak{p}_n}/(x)$$

wobei $x = \frac{f}{1} \in A_{\mathfrak{p}_n}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_n/(f)$. Da $\mathfrak{q}$ maximal ist folgt:

$$n = \dim(A/(f)) = \dim((A/(f))_{\mathfrak{q}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}_n}/(x)) = \dim(A_{\mathfrak{p}_n}) - 1\,,$$

nach Korollar 11.53. Somit erhalten wir

$$\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p}_n) + \dim(A_{\mathfrak{p}_n}) = 0 + n + 1 = \dim(A/(f)) + 1\,,$$

nach Satz 10.32. □

Satz 11.55. *Sei* A *ein noetherscher kommutativer Ring und* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.*

(i) Es gibt $x_1, \ldots, x_r \in A$ *so, dass* $\mathfrak{p}$ *minimal in der Menge aller Primideale* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$ *ist.*

(ii) Es ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis. Aussage (i) heißt, dass das Ideal $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$ $\mathfrak{p}$-primär ist, mit $\mathfrak{p}$ minimal in $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{b} \subset A$ ein Ideal enthält in $\mathfrak{p}$. Dann gilt nach Satz 8.10:

$$\begin{aligned}
\text{es ist } \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{b}) \text{ minimal } &\Leftrightarrow \text{ es ist } \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ minimal}\\
&\Leftrightarrow \text{ es ist } \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})\\
&\Leftrightarrow \text{ das Ideal } \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \text{ ist } \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\text{-primär.}
\end{aligned}$$

Außerdem, ist $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$, so gilt $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \left(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}\right)$. Falls $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primär ist erhalten dann wir $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \delta(A_\mathfrak{p}) \leq r$. Umgekert, sei $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$. Dann existiert ein $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primäres Ideal $\mathfrak{b}$ erzeugt von $\leq r$ Elemente. Seien $x_1, \ldots, x_r \in A$ mit $\mathfrak{b} = \left(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_r}{1}\right)$. Dann ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ wobei $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$ ist. Daher ist $\mathfrak{p}$ an $A/\mathfrak{a}$ assoziiert und minimal in $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})$. □

Aufgabe 11.56. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring und seien $x_1, \ldots, x_r \in A$. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal minimal in der Menge aller Primideale $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_r)$ Sei $1 \leq s \leq r$. Wir betrachten $B = A/(x_1, \ldots, x_s)$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_s)$. Angenommen ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = r$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = r - s$ gilt.

Aufgabe 11.57. Sei A ein kommutativer Ring mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $x \in A - \{0\}$ gibt es nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}$ mit $x \in \mathfrak{m}$.

(ii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist der Ring $A_\mathfrak{m}$ noethersch.

Zeigen Sie, dass A noethersch ist. *Hinweis.* Sei $(0) \neq \mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass es endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ gibt. Wählen Sie $x_0 \in \mathfrak{a}$ und seien $\mathfrak{m}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ die maximalen Ideale mit $x \in \mathfrak{m}_{r+i}$ und $\mathfrak{m}_{r+i} \neq \mathfrak{m}_j$ für alle $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j \leq r$. Für $1 \leq j \leq s$ gibt es $y_j \in \mathfrak{a}$ mit $y_j \notin \mathfrak{m}_{r+j}$. Zeigen Sie, das es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}$ gibt so, dass $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}$, für $1 \leq i \leq r$, das Ideal $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_i}$ erzeugt. Sei $\mathfrak{b} \subset A$ das Ideal erzeugt von $x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{b}_\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ gibt. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Aufgabe 11.58. Unseres Ziel ist ein unendlich dimensionaler noetherscher Ring zu konstruieren (es ist ein Beispiel von Nagata). Sei k ein Körper. Für jede Menge $\mathbb{X}$ bezeichnen wir die freie k-Algebra $k[\mathbb{X}]$ erzeugt von $\mathbb{X}$. Also ist $k[\mathbb{X}]$ der Ring von Polynomen in der Variablen X_i, $i \in \mathbb{X}$, mit Koeffizienten in k. Für jede k-Algebra A und jede Abbildung $f : \mathbb{X} \longrightarrow A$ gibt es genau eine k-Algebrenhomomorphismus $\varphi : k[\mathbb{X}] \longrightarrow A$ mit $\varphi(X_i) = f(i)$ für alle $i \in \mathbb{X}$. Ist $p \in k[\mathbb{X}]$ ein Polynom in der Variablen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$, so ist $\varphi(p) = p(f(i_1), \ldots, f(i_r))$. Es ist $k[\mathbb{X}]$ die Vereinigung aller $k[\mathbb{Y}]$ mit $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ endlich.

(i) Zeigen Sie, dass $k[\mathbb{X}]$ ein Integritätsring ist.

(ii) Zeigen Sie, dass, falls $\mathbb{X}$ unendlich ist, der Ring $k[\mathbb{X}]$ nicht noethersch ist.

Angenommen ist jetzt $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_i$ mit jede $\mathbb{X}_i$ endlich und nicht leer, mit $\mathbb{X}_i \cap \mathbb{X}_j = \varnothing$ für $i \neq j$. Sei $A = k[\mathbb{X}]$. Für jede $i \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathfrak{p}_i$ als das Ideal erzeugt von $\{X_a \mid a \in \mathbb{X}_i\}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $A/\mathfrak{p}_i \cong K[\mathbb{Y}_i]$ gilt, wobei $\mathbb{Y}_i = \bigcup_{j \neq i} \mathbb{X}_j$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}_i \cap k[\mathbb{Y}_i] = \{0\}$ gilt.

(iv) Sei $p \in A - \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller $i \geq 0$ mit $p \in \mathfrak{p}_i$ endlich ist.

(v) Sei S das Komplement von $\bigcup_{i \geq 0} \mathfrak{p}_i$. Zeigen Sie, dass S multiplikativ ist.

(vi) Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \cap S = \varnothing$ und $\mathfrak{a} \neq (0)$. Zeigen Sie, dass es ein $i \geq 0$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ gibt. *Hinweis*. Benützen Sie (iv) zusammen mit Lemma 11.48.

(vii) Sei k_i der Quotientenkörper von $k[\mathbb{Y}_i]$. Zeigen Sie, dass $A_{\mathfrak{p}_i}$ isomorph zu einer Lokalisierung von $k_i[\mathbb{X}_i]$ ist. Zeigen Sie dann, dass $A_{\mathfrak{p}_i}$ noethersch ist.

(viii) Zeigen Sie, dass der Ring $S^{-1}A$ noethersch ist. *Hinweis*. Benützen Sie Aufgabe 11.57.

(ix) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)$ genau die Mächtigkeit von $\mathbb{X}_i$ ist. Angenommen ist die Abbildung $n \longmapsto |\mathbb{X}_n|$ echt aufsteigend. Zeigen Sie, dass der noethersche Ring $S^{-1}A$ unendlich dimensional ist.

11.5 Reguläre Ringe

Satz 11.59. *Seien* A *ein noetherscher lokaler Ring der Dimension* d, *mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$, *und* $k = A/\mathfrak{m}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) Die gewichtete k*-Algebren* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ *und* $k[X_1, \ldots, X_d]$ *sind isomorph.*

(ii) Es ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d$.

(iii) Es existiert $x_1, \ldots, x_d \in A$ *mit* $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$.

Beweis. Zu (i)⇒(ii). Sei $f : \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_d]$ ein bijektiver Morphismus von gewichteten Ringen. Die Einschränkung von f über $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ induziert einen Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong k \cdot X_1 \oplus \cdots \oplus k \cdot X_d \cong k^d \,.$$

Insbesondere gilt

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim_k(k^d) = d \,.$$

Zu (ii)⇒(iii). Folgt direkt aus Korollar 4.16.

Zu (iii)⇒(i). Wir beweisen induktiv über d. Sei $d = 0$. Dann gilt $\mathfrak{m} = \{0\}$, somit $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = k$ (der Polynom Ring mit 0 Variablen). Angenommen ist $d > 0$. Seien $x_1, \ldots, x_d \in A$ mit $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. Für jedes i ist $\bar{x}_i$ die Restklasse von x_i modulo $\mathfrak{m}^2$. Wir bekommen einen surjektive Morphismus von gewichteten k-Algebren

$$\varphi : B = k[X_1, \ldots, X_d] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$$

definiert durch $\varphi(p) = p(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$. Sei $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$. Es ist ein gewichtetes Ideal

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}_n \subset (X_1, \ldots, X_d) \,.$$

Angenommen ist $\mathfrak{a}$ nicht null. Dann existieren $j > 0$ und $f \in \mathfrak{a}_j$ mit $f \neq 0$. Das induziert eine kurze exakte Sequenz von gewichteten B-Moduln der Form

$$\{0\} \longrightarrow B[-j] \longrightarrow B \longrightarrow B/(f) \longrightarrow \{0\}$$

wobei

$$B[-j] = \bigoplus_{n \geq 0} B_{n-j}$$

(mit $B_\ell = \{0\}$ für $\ell < 0$). Seien $P, Q \in \mathbb{Q}[t]$ mit $P(n) = \ell(B_n)$ und $Q(n) = \ell((B/(f))_n)$ für n groß genug. Es ist $\deg(P) \leq d - 1$, nach Korollar 11.41, und

$$P(t) - P(t-j) = Q(t)$$

somit $\deg(Q) \leq d - 2$. Der Morphismus α induziert ein surjektiver gewichteter Morphismus

$$B/(f) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A).$$

Daher gilt $\ell(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \leq \ell((B/(f))_n)$ für alle $n \geq 0$. Es folgt

$$\Delta(P_{\mathfrak{m}}(A))(n) \leq Q(n)$$

für n groß genug, und damit

$$\deg(\Delta(P_{\mathfrak{m}}(A))) \leq \deg(Q) \leq d - 2,$$

im Widerspruch zu $\deg(\Delta(P_{\mathfrak{m}}(A))) = d - 1$. Daher gilt $\ker(\varphi) = \mathfrak{a} = (0)$. □

Definition 11.60. Ein lokaler Ring A ist *regulär*, wenn sein maximales Ideal erzeugt von $\dim(A)$ Elemente ist.
Ein noetherscher kommutativer Ring A ist *regulär*, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ der lokale Ring $A_{\mathfrak{m}}$ regulär ist.

Aufgabe 11.61. Sei A ein regulärer lokaler Ring der Dimension d mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Seien dazu $f_1, \ldots, f_i \in \mathfrak{m}$ deren Restklassen modulo $\mathfrak{m}^2$ linear unabhängig über den Körper $A/\mathfrak{m}$ sind. Dann gilt $i \leq d$. Außerdem, ist $i < d$, so existieren Elemente $f_{i+1}, \ldots, f_d$ so, dass $f_1, \ldots, f_d$ das Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugt.

Satz 11.62 (Regularität als analytische Eigenschaft)**.** *Sei* A *ein lokaler Ring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{m}$, *und sei* $\widehat{A}$ *die* $\mathfrak{m}$*-adische Vervollständigung von* A. *Dann ist* A *regulär genau dann, wenn* $\widehat{A}$ *regulär ist.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^2$. Dieser Satz folgt aus der Äquivalenz zwischen Aussagen (ii) und (iii) von Satz 11.59. □

Satz 11.63. *Jeder reguläre noethersche lokale Ring ist ein Integritätsring.*

Beweis. Sei A ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ ein Integritätsring da er bis auf Isomorphie ein Polynomring ist. Seien $x, y \in A$ nicht null. Da der Durschnitt aller Potenzen von $\mathfrak{m}$ null ist existiert $i \in \mathbb{N}$ bzw. $j \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathfrak{m}^i - \mathfrak{m}^{i+1}$ bzw. $y \in \mathfrak{m}^j - \mathfrak{m}^{j+1}$. Sei $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ die Restklasse von x in $\mathfrak{m}^i$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ bzw. von y in $\mathfrak{m}^j$ modulo $\mathfrak{m}^{j+1}$. Dann sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nicht null im Integritätsring $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ und daher ist $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0$. Also ist $x \cdot y \notin \mathfrak{m}^{i+j+1}$. Insbesondere gilt $x \cdot y \neq 0$. □

Aufgabe 11.64. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Der triviale Ring $\{0\}$ ist regulär aber kein Integritätsring.

(b) Seien A und B zwei nicht triviale noethersche Ringe. Sind A und B regulär, so ist $A \times B$ regulär aber kein Integritätsring.

Satz 11.65. *Sei* A *ein regulärer lokaler Ring der Dimension d mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Seien dazu $f_1, \ldots, f_i \in \mathfrak{m}$ deren Restklassen modulo $\mathfrak{m}^2$ linear unabhängig über den Körper $A/\mathfrak{m}$ sind. Dann ist der lokale Ring $A/(f_1, \ldots, f_i)$ regulär der Dimension $d - i$.*

Beweis. Wir beweisen induktiv über $d - i$. Ist $d = i$, so ist $A/(f_1, \ldots, f_d) = A/\mathfrak{m}$ ein Körper und daher ist regulär der Dimension $0 = d - i$. Sei $d - i > 0$. Ist $i = 0$, so ist $A/(f_1, \ldots, f_i) = A$ regulär der Dimension $d = d - i$. Ohne Einschränkung gilt $0 < i < d$. Es ist dann $\dim(A/(f_1)) = d - 1$, nach Korollar 11.53. Wir wählen $g_2, \ldots, g_d \in \mathfrak{m}$ so, dass die Restklassen von f_1 und von aller g_i in $\mathfrak{m}$ modulo $\mathfrak{m}^2$ eine Basis vom dem $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden (das existiert nach Aussage (ii) von Satz 11.59). Nach dem Krull-Nakayama-Lemma (Korollar 4.16) erzeugten $f_1, g_2, \ldots g_d$ das Ideal $\mathfrak{m}$. Daher ist das maximale Ideal von $A/(f_1)$ erzeugt von der Restklassen von $g_2, \ldots g_d$. Das zeigt, dass $A/(f_1)$ regulär ist, nach Satz 11.59. Sei $i > 2$. Wir bezeichnen dann $\bar{f}_j$ die Restklassen von f_j modulo (f_1), für $2 \leq j \leq i$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass

$$A/(f_1, \ldots, f_i) \cong (A/(f_1))/(\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_i)$$

ein regulärer lokaler Ring der Dimension $(d - 1) - (i - 1) = d - i$ ist. □

Hilfsatz 11.66. *Sei* A *ein regulärer lokaler Ring. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär.*

Beweis. Wir beweisen Induktiv über $d = \dim(A)$. Ohne Einschränkung ist $\mathfrak{p}$ nicht null (da ein Körper regulär der Dimension 0 ist). Sei $a_1 \in \mathfrak{p} - \{0\}$ und sei $B = A/(a)$. Dann ist B ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d - 1$, nach Satz 11.65. Daher ist $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/(\frac{a_1}{1})$ regulär, nach Induktionsvoraussetzung. Es ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein Integritätsring. Daher ist $\frac{a_1}{1}$ kein Nullteiler in $A_{\mathfrak{p}}$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz gilt dann

$$\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \dim(B_{\mathfrak{p}}) + 1\,.$$

Sei $n = \dim(A_\mathfrak{p})$. Nach Satz 11.59 gibt es dann Elemente $a_2,\dots,a_n$ in A mit Restklassen $\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_n$ modulo (a) so, dass $\frac{\bar{a}_2}{1},\dots,\frac{\bar{a}_n}{1}$ das maximale Ideal von $B_\mathfrak{p}$ erzeugt. Da das maximale Ideal von $B_\mathfrak{p}$ das Quotient modulo $(\frac{a_1}{1})$ vom maximalen Ideal von $A_\mathfrak{p}$ ist, erzeugt dann $\frac{a_1}{1},\dots,\frac{a_n}{1}$ das maximale Ideal in $A_\mathfrak{p}$. Nach Satz 11.59 folgt, dass $A_\mathfrak{p}$ regulär ist. □

Satz 11.67. *Sei* A *ein regulärer noetherscher Ring und sei* $S \subset A$ *eine multiplikative Menge. Dann ist die Lokalisierung* $B = S^{-1}A$ *regulär.*

Beweis. Sei $\mathfrak{P}$ ein maximales Ideal in B, und sei $\mathfrak{p}$ das Urbild von $\mathfrak{P}$ in A. Es ist dann $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $A_\mathfrak{p} \cong B_\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Dann ist $A_\mathfrak{p}$ isomorph zu $(A_\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$. Es folgt dann aus dem Lemma oben, das $B_\mathfrak{P}$ regulär ist. □

Aufgabe 11.68 (Jacobisches Kriterium)**.** Sei K ein Körper und sei $a = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$.

$$\mathfrak{m}_a = \{P \in K[X_1,\dots,X_n] \mid P(a) = 0\}.$$

Für $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ bezeichnen wir $d_a(P)$ die Restklasse von $P - P(a)$ modulo $\mathfrak{m}_a^2$. Das bestimmt eine K-lineare Abbildung

$$d_a : K[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass $d_a(P \cdot Q) = d_a(P) \cdot Q(a) + P(a) \cdot d_a(Q)$ für alle $P, Q \in K[X_1,\dots,X_n]$ gilt.

(ii) Für $1 \le i \le n$ und $P \in K[X_1,\dots,X_n]$ bezeichnen Wir die partielle Ableitung von P an der Variabel X_i als $\frac{\partial P}{\partial X_i}$: ist $P = Q_0 + Q_1 \cdot X_i + \cdots + Q_d \cdot X_i^d$ mit jedes Q_j ein Polynom in der Variablen X_j, $j \neq i$, und mit $d > 0$, so ist $\frac{\partial P}{\partial X_i} = Q_1 + \cdots + d \cdot Q_d \cdot X_i^{d-1}$. Es ist $\frac{\partial P}{\partial X_i} = 0$ falls P ein Polynom in der Variablen X_j, $j \neq i$, ist. Zeigen Sie, dass für jedes $P \in K[X_1,\dots,X_n]$

$$d_a(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_i}(a) \cdot d_a X_i$$

gilt.

(iii) Seien $P_1,\dots,P_m \in K[X_1,\dots,X_n]$. Angenommen ist die $m \times n$-Matrix

$$J = \Big(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a)\Big)_{i,j}$$

vom Rang m. Zeigen Sie, dass der lokale Ring $(K[X_1,\dots,X_n]/(P_1,\dots,P_m))_{\mathfrak{m}_a}$ regulär der Dimension $n - m$ ist.

Aufgabe 11.69 (Algebraische Version des Satzes von der impliziten Funktion)**.** Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei A eine K-Algebra endlichem Typ. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ bezeichnen wir $\widehat{A}_\mathfrak{m}$ die $(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})$-adische Vervollständigung von $A_\mathfrak{m}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Der Ring A ist regulär.

(ii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ gibt es $d \in \mathbb{N}$ mit $K[[X_1, \dots, X_d]] \cong \widehat{A_{\mathfrak{m}}}$ als K-Algebren.

Kapitel 12

Das Tensorprodukt

12.1 Moduln

12.1. Sei A ein kommutativer Ring und seien M und N zwei A-Moduln. Wir erinnern an, dass das *Tensorprodukt* $M \otimes_A N$ bestimmt durch die folgende Eigenschaft ist:[1]

(i) Er ist mit einer A-bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A N \\ (x,y) &\longmapsto x \otimes y \end{aligned}$$

(ii) Für jede A-bilineare Abbildung $b : M \times N \longrightarrow V$ gibt es genau eine A-bilineare Abbildung $f : M \otimes_A N \longrightarrow V$ so, dass $f(x \otimes y) = b(x,y)$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ gibt.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & V \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dotted, "f"] & \end{tikzcd}$$

Die kanonische Bijektion

$$\mathrm{Abb}(M \times N, V) \cong \mathrm{Abb}(M, \mathrm{Abb}(N,V))$$

induziert einen A-lineare Isomorphismus

$$\mathrm{Bil}_A(M,N;V) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,V))$$

wobei $\mathrm{Bil}_A(M,N;V) \subset \mathrm{Abb}(M \times N, V)$ die Teilmenge von A-bilinearen Abbildungen ist. Also gilt:

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, V) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,V)).$$

Beispiel 12.2. Die Skalarmultiplikation induziert einen Homomorphismus $A \otimes_A M \longrightarrow M$, der bijektiv ist.

[1] Eine Konstruktion von $M \otimes_A N$ ist: $M \otimes_A N = A^{(M \times N)}/R$ mit R der Untermodul erzeugt von aller Elemente der Form

$$a \cdot i(x,y) + b \cdot i(x',y') - i(a \cdot x + x', y + b \cdot y')$$

für $a, b \in A$, $x, x' \in M$ und $y, y' \in N$, wobei $i : M \times N \longrightarrow A^{(M \times N)}$ die kanonische Inklusionsabbildung ist.

Beispiel 12.3. Seien $f : U \longrightarrow M$ und $g : V \longrightarrow N$ zwei A-linearen Abbildungen. Die Abbildung $(x, y) \longmapsto f(x) \otimes g(y)$ ist bilinear und bestimmt dann genau eine A-lineare Abbildung

$$f \otimes g : U \otimes_A V \longrightarrow M \otimes N$$

durch $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ für alle $x \in U$ und $y \in V$.

Beispiel 12.4. Es gibt genau ein Isomorphismus $\tau : M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ mit $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ für alle $x \in M$ und $y \in N$. Außerdem ist $\tau^2 = \tau \circ \tau$ die Identität von $M \otimes_A N$.

Beispiel 12.5. Seien M, N, P drei A-Moduln. Es gibt genau einen Isomorphismus

$$a : M \otimes_A (N \otimes_A P) \xrightarrow{\simeq} (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

mit $a(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$ für $x \in M$, $y \in N$ und $z \in P$.

Beispiel 12.6. Seien X und Y zwei Mengen. Dann gilt:

$$A^{(X)} \otimes_A A^{(Y)} \cong A^{(X \times Y)}.$$

Satz 12.7. *Sei* V *ein* A-*Modul und sei*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz recht von A-*Moduln. Dann ist*

$$V \otimes_A M \xrightarrow{id_V \otimes f} V \otimes_A N \xrightarrow{id_V \otimes g} V \otimes_A P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz recht.

Beweis. Sei W ein beliebiger A-Modul. Es ist

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M, W)$$

eine exakte Sequenz links. Daher ist die erste Zeile des Diagramms darunter

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(P, W)) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(N, W)) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(M, W)) \\
& \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\{0\} \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(V \otimes_A P, W) & \xrightarrow{(id_V \otimes g)^*} & \mathrm{Hom}_A(V \otimes_A N, W) & \xrightarrow{(id_V \otimes f)^*} & \mathrm{Hom}_A(V \otimes_A M, W)
\end{array}$$

exakt links auch. Das zeigt, das die zweite Zeile exakt links ist. Also ist

$$V \otimes_A M \xrightarrow{id_V \otimes f} V \otimes_A N \xrightarrow{id_V \otimes g} V \otimes_A P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz recht. □

Korollar 12.8. *Sei* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal. Für jeden* A-*Modul* M *gilt:*

(a) *Das Bild der Abbildung* $\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow M$, *definiert durch* $a \otimes x \longmapsto a \cdot x$ *für* $a \in \mathfrak{a}$ *und* $x \in M$, *ist* $\mathfrak{a}M$.

(b) *Es gilt* $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M = M/\mathfrak{a}M$.

Beweis. Aussage (a) ist einfach. Es folgt, dass die Zeilen des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{a} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & \mathfrak{a}M \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\mathfrak{a}M \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

exakte Sequenzen sind. Aus Aussage (a) und dem Schlangen Lemma ist dann die Abbildung $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \longrightarrow M/\mathfrak{a}M$ bijektiv. □

12.9. Sei $M_1, \dots, M_n$ und N A-Moduln. Eine Abbildung $f : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow N$ ist n-linear über A falls, für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und jede Familie $(x_j)_{j \neq i}$ in $\prod_{j \neq i} M_j$, die Abbildung

$$x_i \longmapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

A-linear ist. Das Tensorprodukt aller M_i ist ein A-Modul

$$M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$$

zusammen mit eine $n$lineare Abbildung

$$\begin{aligned} M_1 \times \cdots \times M_n &\longrightarrow M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \end{aligned}$$

so, dass, für alle n-lineare Abbildung $f : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow N$, es eine lineare Abbildung

$$\varphi : M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n \longrightarrow N$$

mit $\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ gibt. Der A-Modul $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ ist definiert als Quotient von $A^{(M_1 \times \cdots \times M_n)}$ modulo den Untermodul erzeugt von Elementen der Form

$$i(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n) + a \cdot i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) - i(x_1, \dots, a \cdot x_j + y_j, \dots, x_n)$$

mit $1 \leq j \leq n$, $y_j \in M_j$, $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$, $a \in A$, und $i : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow A^{(M_1 \times \cdots \times M_n)}$ die kanonische Inklusion.

Satz 12.10. *Seien* M, N *und* P *drei* A*-Moduln. Dann gibt es kanonische Isomorphismen*

$$(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A N \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P).$$

Beweis. Sei V ein A-Modul. Wir bezeichnen $\mathrm{Tri}_A(M,N,P;V)$ die Menge von 3-linearen Abbildungen von $M \times N \times P$ nach V. Es ist dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N \otimes_A P, V) &\cong \mathrm{Tri}_A(M,N,P;V)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Bil}_A(N,P;V)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N \otimes_A P, V))\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A (N \otimes_A P)), V).\end{aligned}$$

Für $V = M \otimes_A N \otimes_A P$ induziert die Identität von V einen Homomorphismus

$$f : M \otimes_A (N \otimes_A P)) \longrightarrow M \otimes_A N \otimes_A P.$$

Für $V = M \otimes_A (N \otimes_A P)$ induziert die Identität von V einen Homomorphismus

$$g : M \otimes_A N \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P).$$

Man beobachtet dann, dass die Elemente der Form

$$x \otimes y \otimes z \qquad \text{bzw.} \quad x \otimes (y \otimes z)$$

mit $x \in M$, $y \in N$ und $z \in P$, ein Erzeugendensystem von $M \otimes_A N \otimes_A P$ bzw. von $M \otimes_A N \otimes_A P$ bilden. Nach Definition gilt

$$f(x \otimes (y \otimes z)) = x \otimes y \otimes z \qquad \text{und} \qquad g(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Es ist dann einfach aus Linearität $f \circ g$ die Identität von $M \otimes_A N \otimes_A P$ und $g \circ f$ die Identität von $M \otimes_A (N \otimes_A P)$. Analog beweisen wir, dass $M \otimes_A N \otimes_A P$ und $(M \otimes_A N) \otimes_A P$ isomorph sind. □

12.2 Ringe

12.11. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutative Ringe. Ist M ein A-Modul, so ist $B \otimes_A M$ ein B-Modul durch die Skalarmultiplikation

$$B \times B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A M$$

definiert durch $a \cdot (b \otimes x) = (a \cdot b) \otimes x$ für alle $a, b \in B$ und $x \in M$. Also als die Komposition

$$B \times (B \otimes_A \otimes M) \stackrel{\otimes}{\longrightarrow} B \otimes_A (B \otimes_A M) \cong (B \otimes_A B) \otimes_A M \stackrel{\mu \otimes 1_M}{\longrightarrow} B \otimes_A M$$

wobei $\mu : B \otimes_A B \longrightarrow B$ die A-lineare Abbildung definiert durch $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$ ist.

Satz 12.12. *Seien* M *ein* A*-Modul und* N *ein* B*-Modul. Dann gibt es einen kanonische Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N),$$

wobei rechts ist N *durch die Skalarmultiplikation* $a \cdot x = f(a) \cdot x$ *für* $a \in A$ *und* $x \in N$ *als* A*-Modul betrachtet.*

Beweis. Wir definieren eine Abbildung

$$u : \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

durch $u(f)(x) = f(1 \otimes x)$ für $f : B \otimes_A M \longrightarrow N$ B-linear und $x \in M$. Es gibt übrigens eine Abbildung

$$v : \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$$

definiert durch $v(g)(b \otimes x) = b \cdot g(x)$ für $g : M \longrightarrow N$ A-linear mit $b \in B$ und $x \in M$. Beide Abbildungen u und v sind einfach B-linear. Außerdem ist $u \circ v$ einfach die Identität. Insbesondere ist u surjektiv. Es ist dann genug zu zeigen, dass u injektiv ist. Sei $f : B \otimes_A M \longrightarrow N$ B-linear mit $u(f) = 0$. Um zu beweisen, dass $f = 0$ gilt ist es genug zu zeigen, dass $f(b \otimes x) = 0$ für alle $b \in B$ und $x \in M$ ist. Da $f(b \otimes x) = b \cdot f(1 \otimes x)$, nach B-Linearität, es ist tatsächlich genug zu zeigen, dass $f(1 \otimes x) = 0$ für jedes $x \in M$ gilt. Aber dies ist genau die Nullheit von $u(f)$. □

Korollar 12.13. *Ist* $S \subset A$ *eine Multiplikative Menge, so gilt*

$$S^{-1} M \cong (S^{-1} A) \otimes_A M$$

für alle A-*Modul* M.

Beweis. Nach dem Satz oben haben $S^{-1}M$ und $(S^{-1}A) \otimes_A M$ gleiche Universelle Eigenschaften. □

12.14. Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow C$ zwei Ringhomomorphismen zwischen kommutative Ringe. Es ist dann $B \otimes_A C$ ein kommutativer Ring mit der Multiplikation

$$(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \longrightarrow (B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C) \cong (B \otimes_A B) \otimes_A (C \otimes_A C) \longrightarrow B \otimes_A C$$

induziert aus der Multiplikationen $B \otimes_A B \longrightarrow B$ und $C \otimes_A C \longrightarrow C$. Also ist die Multiplikation auf $B \otimes_A C$ bestimmt durch

$$(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = (b \cdot b') \otimes (c \cdot c')$$

für alle $b.b' \in B$ und $c, c' \in C$. Wir erhalten ein kommutativer Quadrat von Ringe:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "v"] \\ B \arrow[r, "u"] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

wobei $u(b) = b \otimes 1$ und $v(c) = 1 \otimes c$ für alle $b \in B$ und $c \in C$. Dieses Quadrat is kokartesisch in der Kategorie von Ringe. Also gilt die folgende Aussage.

Satz 12.15. *Seien* $\beta : B \longrightarrow D$ *und* $\gamma : C \longrightarrow D$ *Ringhomomorphismen, mit* D *kommutativ, so, dass* $\gamma \circ g = \beta \circ f$ *gilt. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus* $\varphi : B \otimes_A C \longrightarrow D$ *mit der Gleichung*

$\varphi(b \otimes c) = \beta(b) \cdot \gamma(c)$ *für alle* $b \in B$ *und* $c \in C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "v"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "u"] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung

$$\psi : B \times C \longrightarrow D$$

definiert durch $\psi(b, c) = \beta(b) \cdot \gamma(c)$ für $b \in B$ und $c \in C$ ist A-bilinear. Daher gibt es genau eine Abbildung $\varphi : B \otimes_A C \longrightarrow D$ mit $\varphi(b \otimes c) = \beta(b) \cdot \gamma(c)$ für alle $b \in B$ und $c \in C$. Es ist dann genug zu zeigen, dass φ einen Ringhomomorphismus ist (nachrechnen). □

Korollar 12.16. *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *ein Ringhomomorphismus zwischen kommutative Ringe. Für alle* $n \geq 0$ *gilt*

$$B \otimes_A A[X_1, \ldots, X_n] \cong B[X_1, \ldots, X_n]$$

als B*-Algebren.*

Aufgabe 12.17. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutative Ringe und sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal mit $k = A/\mathfrak{m}$. Zeigen Sie: es gibt einen kanonische Homöomorphismus

$$\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}\} \cong \mathrm{Spec}(k \otimes_A B).$$

12.18. Ein *kartesisches* Quadrat von Mengen ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd} \qquad f \circ a = b \circ f'$$

so, dass die Abbildung

$$X' \longrightarrow Y' \times_Y X = \{(y', x) \in Y' \times X \mid b(y') = f(x)\}$$

definiert durch $x' \longmapsto (f'(x'), a(x'))$ bijektiv ist. Wir beobachten, dass, für jede Menge M, das induzierte Quadrat

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Abb}(M, X') \arrow[r, "a_*"] \arrow[d, "f'_*"'] & \mathrm{Abb}(M, X) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathrm{Abb}(M, Y') \arrow[r, "b_*"] & \mathrm{Abb}(M, Y) \end{tikzcd}$$

kartesisch ist (einfach nachrechnen).

Satz 12.19. *Ein kommutatives Quadrat von Mengen*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

ist genau dann kartesisch, wenn für jedes $y' \in Y'$, die Einschränkung von a eine Bijektion

$$(f')^{-1}(y') \cong f^{-1}(b(y'))$$

induziert.

Beweis. Sei $\varphi : X' \longrightarrow Y' \times_Y X = \{(y', x) \in Y' \times X \mid b(y') = f(x)\}$ die kanonische Abbildung wie oben. Sei $p : Y' \times_Y X \longrightarrow Y'$ die Projektion definiert durch $p(y', x) = y'$. Es ist $p \circ \varphi = f'$ und daher induziert φ eine Abbildung

$$\varphi_{y'} : (f')^{-1}(y') \longrightarrow p^{-1}(y').$$

Außerdem induziert die Projektion $(y', x) \longmapsto x$ eine Bijektion

$$p^{-1}(y') \cong f^{-1}(b(y')).$$

Ist φ eine Bijektion, so ist die Abbildung $\varphi_{y'}$ für jedes y' bijektiv. Umgekehrt, gilt $(f')^{-1}(y') \cong f^{-1}(b(y'))$ für alle y', so ist $\varphi_{y'}$ bijektiv für alle y'. Da

$$\coprod_{y' \in Y'} (f')^{-1}(y') = X' \quad \text{und} \quad \coprod_{y' \in Y'} p^{-1}(y') = Y' \times_Y X$$

gelten folgt, dass φ bijektiv ist. □

Korollar 12.20. *Jedes kommutatives Quadrat von Mengen*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

indem f und f' bijektiv sind ist kartesisch.

Beweis. Für jedes $y' \in Y'$ ist die Abbildung $(f')^{-1}(y') \longrightarrow f^{-1}(b(y'))$ bijektiv, da sie eine Abbildung zwischen Mengen, die genau ein Element haben. □

Korollar 12.21. *Sei*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

ein kommutatives Quadrat von Mengen. Ist f bijektiv bzw. injektiv bzw. surjektiv, so ist f' bijektiv bzw. injektiv bzw. surjektiv.

Beweis. Für jedes $y' \in Y'$ gilt $(f')^{-1}(y') \cong f^{-1}(b(y'))$. Also, ist f bijektiv bzw. injektiv bzw. surjektiv, so ist $(f')^{-1}(y')$ ein Menge mit genau ein Element bzw. eine Menge mit höchstens einem Element bzw. eine nicht leere Menge. Das heißt, dass f' bijektiv bzw. injektiv bzw. surjektiv ist. □

Satz 12.22. *Seien*

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r, "b'"] & Y' \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

zwei kommutative Quadrate. Angenommen ist das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch. Es ist dann das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y'' \arrow[r, "b'"] & Y' \end{tikzcd}$$

genau dann kartesisch, wenn das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "a \circ a'"] \arrow[d, "f''"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r, "b \circ b'"] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch ist.

Beweis. Sei $y'' \in Y''$. Wir bezeichnen $y' = b'(y')$ und $y = b(y')$, Es ist $(f')^{-1}(y') \cong f^{-1}(y)$ und ein kanonisches kommutatives Dreieck:

$$\begin{tikzcd} (f'')^{-1}(y'') \arrow[r] \arrow[d] & (f')^{-1}(y') \arrow[dl, "\cong"'] \\ f^{-1}(y) & \end{tikzcd} .$$

Daher gilt $(f'')^{-1}(y'') \cong (f')^{-1}(y')$ genau dann, wenn $(f'')^{-1}(y'') \cong f^{-1}(y)$ gilt. Dieser Satz folgt dann aus Satz 12.19. □

Satz 12.23. *Sei*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Quadrat von kommutativen Ringen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) Der Ringhomomorphismus $\varphi : B \otimes_A C \longrightarrow D$ bestimmt durch $\varphi(b \otimes c) = h(b) \cdot k(c)$ für $b \in B$ und $c \in C$ ist bijektiv.

(ii) *Für jeden kommutative Ring* R *ist das Quadrat*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(D,R) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "h^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C,R) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B,R) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A,R) \end{tikzcd}$$

kartesisch, wobei $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(S,R)$ *die Menge von Ringhomomorphismen von* S *nach* R *ist.*

Beweis. Es ist das Faserprodukt

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B,R) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A,R)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C,R)$$

genau die Menge von kommutativen Quadraten der Form da unter.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & R \end{tikzcd}$$

Also, nach Satz 12.15 gibt es eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B \otimes_A C, R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B,R) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A,R)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C,R).$$

Daher ist die Abbildung

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(D,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B \otimes_A C, R)$$

genau dann für alle R bijektiv, wenn das Quadrat

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(D,R) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "h^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C,R) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B,R) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A,R) \end{tikzcd}$$

für alle R kartesich ist. Insbesondere folgt (ii) von (i). Angenommen gilt (ii). Für $R = D$ ist die Identität von D der eindeutige Ringhomomormorphismus $a : D \longrightarrow D$ mit $a \circ h = h$ und $a \circ k = k$. Für $R = B \otimes_A C$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\psi : D \longrightarrow B \otimes_A C$ mit $\psi(h(b)) = b \otimes 1$ und $\psi(k(c)) = 1 \otimes c$ für alle $b \in B$ und $c \in C$. Für $a = \varphi \circ \psi$ gilt $a \circ h = h$ und $a \circ k = k$. Damit ist $\varphi \circ \psi$ die Identität von D. Gleichweise ist $\psi \circ \varphi$ die Identität von $B \otimes_A C$. □

Satz 12.24. *Seien* $f : A \longrightarrow B$, $f' : B \longrightarrow B''$ *und* $g : A \longrightarrow C$ *Ringhomomorphismen zwischen kommutative Ringe. Es ist dann einen* B'*-Algebrenisomorphismus*

$$B' \otimes_A C \cong B' \otimes_B (B \otimes_A C).$$

Beweis. Sei R ein kommutativer Ring. Dann erhalten wir zwei kartesische Quadrate da unter.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B' \otimes_B (B \otimes_A C), R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B \otimes_A C, R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C, R) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B', R) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B, R) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, R)
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 12.22 ist das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B' \otimes_B (B \otimes_A C), R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(C, R) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(B', R) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, R)
\end{tikzcd}$$

für alle R kartesisch. Es folgt dann von Satz 12.23, dass die kanonische Abbildung

$$B' \otimes_A C \longrightarrow B' \otimes_B (B \otimes_A C)$$

bijektiv ist. □

Satz 12.25. *Seien* $f : A \longrightarrow B$ *und* $f' : B \longrightarrow B''$ *Ringhomomorphismen zwischen kommutative Ringe. Es gibt einen kanonische* B'*-lineare Isomorphismus*

$$B' \otimes_B (B \otimes_A M) \cong B' \otimes_A M.$$

Beweis. Die B-lineare Abbildung

$$f' \otimes \mathrm{id}_M : B \otimes_A M \longrightarrow B' \otimes_A M$$

induziert nach Satz 12.12 eine kanonische B'-lineare Abbildung

$$a_M : B' \otimes_B (B \otimes_A M) \longrightarrow B' \otimes_A M.$$

Sei V ein B'-Modul. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B(B' \otimes_A M, V) &\cong \mathrm{Hom}_A(M, V) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, V) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{B'}(B' \otimes_B (B \otimes_A M), V).
\end{aligned}$$

Also ist die Abbildung

$$a_M^* : \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B'}(B' \otimes_B (B \otimes_A M), V)$$

für alle V bijektiv. Nach Korollar 1.12 und Korollar 1.15 ist dann a_M eine Bijektion. □

Notiz 12.26. Man kann Satz 12.24 von Satz 12.25 beweisen: ist C eine A-Algebra, so ist der B'-lineare Isomorphismus $B' \otimes_B (B \otimes_A C) \cong B' \otimes_A C$ Satz 12.25 vereinbar mit der Multiplikation (nachrechenen).

Aufgabe 12.27. Sei A ein kommutativer Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von A-Algebren

$$A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \cong (A/\mathfrak{a}) \otimes_A (A/\mathfrak{b}).$$

Aufgabe 12.28. Sei A ein kommutativer lokaler Ring und seien M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $M = \{0\}$ oder $N = \{0\}$ gilt.
Hinweis. Sei $k = A/\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal. Zeigen Sie, dass $(k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) = \{0\}$ gilt.

Kapitel 13

Gerichtete Limiten

13.1 Mengen

Definition 13.1. Eine *gerichtete Menge* ist eine nicht leere teilweise geordnete Menge I so, dass für jede $i, j \in \mathrm{I}$ es ein $k \in \mathrm{I}$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ gibt.
Ein *gerichtetes System von Mengen* $\mathrm{M}_\bullet$ ist eine Familie $(\mathrm{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ von Mengen zusammen mit eine Familie von *strukturellen Abbildungen* $u_{i,j} : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}_j$ für $i \leq j$ in I so, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) Es ist $u_{i,i}$ die Identität von M_i für jedes $i \in \mathrm{I}$.

(ii) Es ist

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}_i \arrow[r, "u_{i,j}"] \arrow[dr, "u_{i,k}"'] & \mathrm{M}_j \arrow[d, "u_{j,k}"] \\ & \mathrm{M}_k \end{tikzcd} \qquad u_{i,k} = u_{j,k} \circ u_{i,j}$$

für alle $i \leq j \leq k$ in I.

Der *gerichtete Limes* (oder auch der Kolimites) von $\mathrm{M}_\bullet$ ist die Menge $\varinjlim_i \mathrm{M}_i$ definiert wie folgt: es ist

$$\varinjlim_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i = \left(\coprod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \right) / \sim$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation bestimmt durch

$$x \sim y \iff \text{es gibt } k \geq i, j \text{ mit } u_{i,k}(x) = u_{j,k}(y)$$

für $x \in \mathrm{M}_i$ und $y \in \mathrm{M}_j$.

Satz 13.2. *Sei* $\mathrm{M}_\bullet$ *ein gerichtetes System von Mengen. Sei* $f_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{N}$ *eine Familie von Abbildungen indexiert durch* I *so, dass*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}_i \arrow[r, "u_{i,j}"] \arrow[dr, "f_i"'] & \mathrm{M}_j \arrow[d, "f_j"] \\ & \mathrm{N} \end{tikzcd} \qquad f_j \circ u_{i,j} = f_i$$

für alle $i \leq j$ *in* I *gilt. Dann gibt es genau eine Abbildung* $f : \varinjlim_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{N}$ *so, dass* $f(x) = f_i(x_i)$ *für alle* $i \in \mathrm{I}$ *und* $x_i \in \mathrm{M}_i$*, mit* x *die Äquivalenzklasse von* x_i*.*

Beweis. Einfach. □

Beispiel 13.3. Sei X eine Menge. Sei I die Menge von nicht-leeren endlichen Teilmengen von X, partiell geordnet durch Inklusion. Dann ist I eine gerichtete Menge. Es gibt ein gerichtetes System $M_\bullet$ definiert durch $M_i = i$ für jede $i \in I$. Die Inklusionen $M_i \subset X$ induziert eine Bijektion

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \cong X\,.$$

Das heißt nur, dass X die Vereinigung seiner nicht-leeren endlichen Teilmengen ist!

Beispiel 13.4. Sei M eine Menge und sei I eine gerichtete Menge. Man betrachtet das gerichtete System von Mengen $M_\bullet$ definiert durch $M_i = M$ für alle $i \in I$ und $u_{i,j} = \mathrm{id}_M$ für alle $i \le j$ in I. Dann induziert die Identität von M eine kanonische Bijektion

$$\varinjlim_{i \in I} M \cong M\,.$$

Definition 13.5. Sei I ein gerichtete Menge. Ein *Morphismus von gerichteten Systemen von Mengen* $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ ist eine Familie von Abbildungen $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ für alle $i \in I$ so, dass das Quadrat

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_{i,j}"'] & N_i \arrow[d, "v_{i,j}"] \\ M_j \arrow[r, "f_j"] & N_j \end{tikzcd}$$

kommutiert (wobei $v_{i,j}$ die strukturelle Abbildungen von $(N_i)_{i \in I}$ bezeichnen).

Satz 13.6. *Sei* I *eine gerichtete Menge. Man betrachtet ein kommutatives Quadrat von Systemen von Mengen indexiert durch* I.

$$\begin{tikzcd} M_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & N_\bullet \arrow[d, "b"] \\ P_\bullet \arrow[r, "g"] & Q_\bullet \end{tikzcd}$$

so, dass jedes Quadrat

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "a_i"'] & N_i \arrow[d, "b_i"] \\ P_i \arrow[r, "g_i"] & Q_i \end{tikzcd}$$

kartesisch ist. Dann ist das induzierte Quadrat

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{i \in I} M_i \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{i \in I} N_i \arrow[d, "b"] \\ \varinjlim_{i \in I} P_i \arrow[r] & \varinjlim_{i \in I} Q_i \end{tikzcd}$$

kartesisch.

Beweis. Sei

$$\varphi : \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} P_i \times_{\varinjlim_{i\in I} Q_i} \varinjlim_{i\in I} N_i$$

die induzierte Abbildung: ist x die Äuivalenzklasse von $x_i \in M_i$, so ist $\varphi(x) = (t,y)$ mit t bzw. t die Äquivalenzklasse von $a_i(x_i)$ bzw. y die Äquivalenzklasse von $f_i(x_i)$. Wir werden zeigen, dass φ bijektiv ist.

Zu Surjektivität. Sei (t,y) in $\varinjlim_{i\in I} P_i \times_{\varinjlim_{i\in I} Q_i} \varinjlim_{i\in I} N_i$. Es gibt $i \in I$ mit t die Äquivalenzklasse von $t_i \in P_i$. Es gibt $j \in I$ mit y die Äquivalenzklasse von $y_j \in P_j$. Wir wählen $k \geq i,j$. Dann ist t bzw. y die Äquivalenzklasse von dem Bild von t_i bzw. von y_j durch die Strukturelle Abbildung $P_i \longrightarrow P_k$ bzw. $N_j \longrightarrow N_k$. Ohne Einschränkung gilt dann $i = j$. Es ist $g_i(t_i)$ äquivalent zu $b_i(y_i)$. Wir wählen $k \geq i$ mit der Bilde von $g_i(t_i)$ und $b_i(y_i)$ gleichen in Q_k. Durch Einsetzen von t_i bzw. y_i durch seinem Bild durch strukturellen Abbildungen, ohne Einschränkung gilt $g_i(t_i) = b_i(y_i)$. Da $M_i \cong P_i \times_{Q_i} N_i$ gibt es ein $x_i \in M_i$ mit $a_i(x_i) = t_i$ und $f_i(x_i) = y_i$. Sei x die Äquivalenzklasse von x_i. Dann gilt $\varphi(x) = (t,y)$.

Zu Injektivität. Seien $i,j \in I$ und $x_i \in M_i$, $x'_j \in M_j$ mit Äquivalenzklassen x und x' so, dass $\varphi(x) = \varphi(x')$. Wir wählen $k \geq i,j$. Dann ist x bzw. x' die Äquivalenzklasse von $u_{i,k}(x_i)$ bzw. von $u_{j,k}(x'_j)$. Ohne Einschränkung ist dann $i = j$. Es ist $g_i(a_i(x_i)) = b_i(f_i(x_i))$ äquivalent zu $g_i(a_i(x'_i)) = b_i(f_i(x'_i))$. Es gibt $k \geq i$ so, dass, durch Ersetzen von i durch k, und durch Ersetzen x_i bzw, x'_i durch $u_{i,k}(x_i)$ bzw. $u_{i,k}(x_i)$, die Gleichung

$$g_i(a_i(x_i)) = g_i(a_i(x'_i))$$

gilt. Analog, ohne Einschränkung gelten $f_i(x_i) = f_i(x'_i)$ und $a_i(x_i) = a_i(x'_i)$. Da $M_i \cong P_i \times_{Q_i} N_i$ gilt folgt dann $x_i = x'_i$. Also ist $x = x'$. □

Korollar 13.7. *Sei* I *eine gerichtete Menge und sei* $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ *ein Morphismus von gerichteten Systemen indexiert durch* I. *Ist die Abbildung* $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ *für alle* $i \in I$ *injektiv, so ist die Induzierte Abbildung*

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} N_i$$

injektiv.

Beweis. Eine Abbildung $g : X \longrightarrow Y$ ist genau dann injektiv, wenn das Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

kartesisch ist (nachrechnen). Also ist

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\mathrm{id}_{M_i}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M_i}"'] & M_i \arrow[d, "f_i"] \\ M_i \arrow[r, "f_i"] & N_i \end{tikzcd}$$

kartesisch für alle $i \in \mathrm{I}$. Nach Satz 13.6 erhalten wir ein kartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \arrow[d] \\ \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \arrow[r] & \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i \end{tikzcd}$$

somit $\varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ injektiv ist. □

Korollar 13.8. *Sei* I *eine gerichtete Menge und sei* $\mathrm{M}_\bullet$ *ein gerichtetes System von Mengen. Angenommen sind die strukturelle Abbildungen* $f_{i,j} : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}_j$ *injektiv. Dann ist für jedes* $i \in \mathrm{I}$ *die kanonische Abbildung* $\mathrm{M}_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$*, die ein Element* $x_i \in \mathrm{M}_i$ *zu seiner Äquivalenzklasse sendet injektiv.*

Beweis. Sei $i \in \mathrm{I}$. Man betrachtet $\mathrm{J} = \{j \in \mathrm{I} \mid j \geq i\}$. Es ist die kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{M}_j \longrightarrow \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$$

bijektiv. Sei $\mathrm{N}_j = \mathrm{M}_i$ für alle $j \in \mathrm{J}$. Es ist $\mathrm{M}_i = \mathrm{N}_j \longrightarrow \mathrm{M}_j$ injektiv für alle $j \in \mathrm{J}$. Daher folgt aus Korollar 13.7, dass die kanonische Abbildung $\mathrm{M}_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ injektiv ist. □

Korollar 13.9. *Sei* I *eine gerichtete Menge und sei* $\mathrm{M}_\bullet$ *und* $\mathrm{N}_\bullet$ *zwei gerichtete Systeme von Mengen. Dann gilt*

$$\varinjlim_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{M}_i \times \mathrm{N}_i) \cong \left(\varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i\right) \times \left(\varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i\right).$$

Beweis. Sei e eine Menge mit genau ein Element. Sind X und Y Mengen, so gilt: $\mathrm{X} \times_e \mathrm{Y} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Sei $\mathrm{Q}_\bullet$ das gerichtete System definiert durch $\mathrm{Q}_i = e$ für alle $i \in \mathrm{I}$. Dann gilt

$$\varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Q}_i \cong e.$$

Dieses Korollar ist dann eine besonderes Fall von Satz 13.6. □

13.2 Moduln

Es ist A ein Ring.

Definition 13.10. Sei I eine gerichtete Menge. Ein *gerichtetes System von Moduln* $\mathrm{M}_\bullet$ ist ein gerichtetes System von Mengen, sodass folgendes gilt.

(i) Für jedes $i \in \mathrm{I}$ ist M_i ein A-Modul.

(ii) Für alle $i \leq j$ in I ist die stukturelle Abbildund $u_{i,j} : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}_j$ A-linear.

Satz 13.11. *Es gibt genau eine Struktur von* A*-Modul über* $\mathrm{M} = \varinjlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ *so, dass die kanonische Abbildung* $\mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}$ *für jedes* $i \in \mathrm{I}$ A*-linear ist.*

Beweis. Die Additionsabbildungen

$$\begin{aligned} M_i \times M_i &\longrightarrow M_i \\ (x_i, y_i) &\longmapsto x_i + y_i \end{aligned}$$

induzierten eine Abbildung

$$\begin{aligned} M \times M \cong \varinjlim_{i \in I}(M_i \times M_i) &\longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i = M \\ (x, y) &\longmapsto x + y\,. \end{aligned}$$

Es ist einfach M eine abelsche Gruppe. Analog induzierten die Skalarmultiplikationsabbildungen

$$\begin{aligned} A \times M_i &\longrightarrow M_i \\ (a, x_i) &\longmapsto a \cdot x_i \end{aligned}$$

eine Abbildung

$$\begin{aligned} A \times M \cong \varinjlim_{i \in I}(A \times M_i) &\longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i = M \\ (a, x) &\longmapsto a \cdot x\,. \end{aligned}$$

Es ist dann M ein A-Modul. □

Satz 13.12. *Sei* $M_\bullet$ *ein gerichtetes System von* A*-Moduln indexiert durch einer gerichteten Menge* I*. Sei* $f_i : M_i \longrightarrow N$ *eine Familie von* A*-linearen Abbildungen indexiert durch* I *so, dass*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "u_{i,j}"] \arrow[dr, "f_i"'] & M_j \arrow[d, "f_j"] \\ & N \end{tikzcd} \qquad f_j \circ u_{i,j} = f_i$$

für alle $i \leq j$ *in* I *gilt. Dann gibt es genau eine* A*-lineare Abbildung* $f : \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow N$ *so, dass* $f(x) = f_i(x_i)$ *für alle* $i \in I$ *und* $x_i \in M_i$*, mit* x *die Äquivalenzklasse von* x_i*.*

Beweis. Folgt direkt aus Sätze 13.2 und 13.11. □

Aufgabe 13.13. Sei I eine Menge und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln. Sei J die Menge von endlichen Teilmengen von I. Zu jedes $E \in J$ ist die dirkete $\bigoplus_{e \in E} M_e$ assoziiert. Zeigen Sie, dass

$$E \longmapsto \bigoplus_{e \in E} M_e$$

ein gerichtetes System von A-Moduln indexiert durch J ist. Zeigen Sie, dass

$$\varinjlim_{E \in J} \bigoplus_{e \in E} M_e \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$$

gilt.

Aufgabe 13.14. Sei A kommutativ und sei $f \in A$. Wir betrachten ein A-Modul M.

(a) Sei $I = \mathbb{N}_{>0}$ gewöhnlich geordnet. Für $i \leq j$ definieren wir dann $u_{i,j} : M \longrightarrow M$ für die Abbildung

$$x \longmapsto f^{j-i} \cdot x.$$

Zeigen Sie, dass $M_\bullet$ ein gerichtetes System von A-Moduln ist, wobei $M_i = M$ für alle $i \in I$, mit der strukturellen Abbildungen $u_{i,j}$ wie oben.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \cong M[f^{-1}]$$

gilt.

Satz 13.15. *Sei* I *ein gerichtete Menge und seien* $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ *und* $g : N_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ *zwei Morphismen von gerichteten Systemen von* A*-Moduln so, dass jedes Diagramm*

$$\{0\} \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} P_i \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz ist. Dann gibt es eine kanonische kurze exakte Sequenz

$$\{0\} \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} N_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} P_i \longrightarrow \{0\}.$$

Beweis. Da jedes Quadrat

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & N_i \arrow[d, "g_i"] \\ \{0\} \arrow[r] & P_i \end{tikzcd}$$

kartesisch ist das Quadrat

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{i \in I} M_i \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_{i \in I} N_i \arrow[d] \\ \{0\} \arrow[r] & \varinjlim_{i \in I} P_i \end{tikzcd}$$

kartesisch. Also haben wir eine exakte Sequenz links

$$\{0\} \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} N_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} P_i.$$

Es ist dann genug zu zeigen, dass die Abbildung $\varinjlim_{i \in I} N_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} P_i$ surjektiv. Aber sie sendet die Äquivalenzklasse eines Elements $x_i \in N_i$ zu der Äquivalenzklasse von $g_i(x_i)$. Da jede g_i surjektiv ist folgt dann die gewünschte Surjektivität. □

Satz 13.16. *Sei* $M_\bullet$ *ein gerichtetes System von* A*-Moduln und sei* V *ein* A*-Modul. Dann gilt*

$$\varinjlim_{i \in I} (V \otimes_A M_i) \cong V \otimes_A (\varinjlim_{i \in I} M_i).$$

Beweis. Die kanonische Abbildungen $M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i$ induzierten Abbildungen $V \otimes_A M_i \longrightarrow V \otimes_A \varinjlim_{i\in I} M_i$ und daher eine A-lineare Abbildung

$$\psi : \varinjlim_{i\in I}(V \otimes_A M_i) \cong V \otimes_A (\varinjlim_{i\in I} M_i).$$

Es gibt ein gerichtetes System von bilinearen Abbildungen

$$V \times M_i \longrightarrow V \otimes_A M_i$$

und daher eine bilineare Abbildung

$$f : V \times \varinjlim_{i\in I} M_i \cong \varinjlim_{i\in I}(V \times M_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I}(V \otimes_A M_i)$$

nach Beispiel 13.4 und Korollar 13.9. Daher gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \otimes_A \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I}(V \otimes_A M_i)$$

mit $\varphi(v \otimes x) = f(v,x)$. Es ist klar $\psi(f(v,x)) = v \otimes x$, sodass $\psi \circ \varphi$ die Identität ist. Insbesondere ist φ injektiv. Jedes Element y von $\varinjlim_{i\in I}(V \otimes_A M_i)$ ist die Äquivalenzklasse einem Element x_i von $V \otimes_A M_i$ für ein $i \in I$. Ist x das Bild von x_i durch die kanonische Abbildung $V \otimes_A M_i \longrightarrow V \otimes_A \varinjlim_{i\in I} M_i$, so ist $\varphi(x) = y$. Also ist φ surjektiv. □

13.3 Endliche Präsentierbarkeit

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 13.17. Ein A-Modul M heißt *endlich präsentierbar* falls es eine exakte Sequenz rechts der Form

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ existiert.

Notiz 13.18. Jeder endlich präsentierbar A-Modul ist endlich erzeugt. Falls A- noethersch ist, jeder endlich erzeugte A-Modul ist endlich präsentierbar. Aber ist A kein noetherscher Ring, so existiert ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, das nicht endlich erzeugt ist, sodass das Quotient $A/\mathfrak{a}$ endlich erzeugt aber nicht endlich präsentierbar ist.

Satz 13.19. *Sei* M *ein endlich präsentierbarer* A*-Modul und sei* $M = M' \oplus M''$ *eine Zerlegung. Dann ist* M' *endlich präsentierbar.*

Beweis. Wir wählen eine exakte Sequenz recht

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{q} M \longrightarrow \{0\}$$

Sei $P = q^{-1}(M'')$ und sei $q'' : P \longrightarrow M''$ die Einschränkung auf P. Es ist $\ker(q'') = \ker(q) = \mathrm{im}(f)$ endlich erzeugt. Aus der kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
 & & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \ker(q'') \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "q''"] \arrow[d, hook] & M'' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{im}(f) \arrow[r, hook] & A^n \arrow[r, "q"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & & A^n/P \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d] & M' \arrow[d] & \\
 & & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

folgt, dass es eine kurze exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow P \longrightarrow A^n \longrightarrow M' \longrightarrow \{0\}$$

mit P endlich erzeugt gibt. □

Satz 13.20. *Sei* $B \longrightarrow A$ *einen Ringhomomorphismus und sei* N *ein endlich präsentierbarer* B*-Modul. Dann ist* $A \otimes_B N$ *ein endlich präsentierbarer* A*-Modul.*

Beweis. Sei

$$B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow N \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz rechts. Dann ist

$$A \otimes_B B^m \longrightarrow A \otimes_B B^n \longrightarrow A \otimes_B N \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz rechts mit $A \otimes_B B^i \cong A^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. □

Satz 13.21. *Sei* M *ein* A*-Modul. Es existiert eine gerichtete Menge* I *und ein gerichtetes System von endlich präsentierbaren* A*-Moduln* $M_\bullet$ *indexiert durch* I *mit*

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \cong M.$$

Beweis. Sei I die Menge von Paaren (B, N) mit $B \subset A$ ein Unterring von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ und $N \subset M$ ein B-Untermodul. Die Menge I ist partiell geordnet durch

$$(B, N) \le (B', N') \qquad \Leftrightarrow \qquad B \subset B' \text{ und } N \subset N'.$$

Es ist die Menge gerichtet: für (B, N) und (B', N') in I erhalten wir der Unterring B'' erzeugt von $B \cup B'$ in A und der B''-Untermodul von M erzeugt von $N \cup N'$. Die $\mathbb{Z}$-Algebra B'' ist von endlichem Typ denn: ist $B = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ und $B' = \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]$, so ist $B'' = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$; analog sit

S bzw. S' ein erzeugenden System von N bzw. von N' als B-Modul bzw. B'-Modul, so ist $S \cup S'$ ein erzeugenden System von N'' als B''-Modul. Also gilt $(B'', N'') \in I$ mit $(B, N) \leq (B'', N'')$ und $(B', N') \leq (B'', N'')$. Die Menge I ist nicht leer da $(\mathbb{Z}, \{0\}) \in I$ gilt.

Für $i = (B, N) \in I$ definieren wir $M_i = A \otimes_B N$. Die B-lineare Inklusion $N \subset M$ induziert eine A-lineare Abbildung $f_i : M_i \longrightarrow M$. Das bestimmt eine A-lineare Abbildung

$$\varphi : \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow M.$$

Für jedes $i = (B, N) \in I$ ist B ein noetherscher Ring (nach dem Hilbertschen Basissatz) und daher ist N endlich präsentierbar als B-Modul. Nach Satz 13.20 ist dann M_i endlich präsentierbar als A-Modul. Es ist jetzt genug zu zeigen, dass φ bijektiv ist.

Zu Surjektivität. Sei $x \in M$. Es ist dann $i = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \cdot x) \in I$ und x ist klar im Bild von der kanonischen Abbildung $M_i \longrightarrow M$. Damit folgt die Surjektivität von φ.

Zu Injektivität. Sei $(B, N) \in I$ und sei $y \in M_i$ mit nullen Bild in M. Es gibt $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $x_1 \ldots, x_n \in N$ mit

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i .$$

Sei B' der Unterring erzeugt von B und $a_1, \ldots, a_n$ und sei N' der B'-Untermodul von M erzeugt von $N \cup \{x_1 \ldots, x_n\}$. Es ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = 0 \in N' \subset M.$$

Das kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_B N \arrow[r] & A \otimes_{B'} N' \arrow[r] & M \\
B' \otimes_B N \arrow[r] \arrow[u] & B' \otimes_{B'} N' \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[u] & N' \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i = 0$ in $B' \otimes_B N'$ und damit in $A \otimes_{B'} N'$ gilt. Es folgt, dass die Äquivalenzklasse von y null in $\varinjlim_{i \in I} M_i$ ist. □

Notiz 13.22. Falls A noethersch ist der Beweis vom Satz oben einfacher: jeder A-Modul M ist die gerichtete Vereinigung seiner endlich erzeugten Untermoduln. Und da A noethersch ist, ist jeder endlich erzeugte Modul endlich präsentierbar.

Satz 13.23. *Sei* M *ein* A*-Modul. Die folgenden Eigenschaften sind Äquivalent.*

(i) Der A*-Modul* M *ist endlich präsentierbar.*

(ii) Für jede gerichtete Menge und jedes gerichtete System $N_\bullet$ *von* A*-Moduln ist die kanonische* A*-lineare Abbildung*

$$\varinjlim_{i \in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_A(M, \varinjlim_{i \in I} N_i)$$

bijektiv.

Beweis. Zu (i)⇒(ii). Sei $N_\bullet$ ein gerichtetes System von A-Moduln. Sei $\mathscr{C}$ die Klasse aller A-Moduln V so, dass die kanonische A-lineare Abbildung

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(V, N_i) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_A(V, \varinjlim_{i\in I} N_i)$$

bijektiv ist. Da $\mathrm{Hom}_A(A, N) \cong N$ gilt ist A in $\mathscr{C}$. Da gerichtete Kolimiten vereinbar mit endlichen Produkten sind (Korollar 13.9) er halten wir induktiv über n:

$$\begin{aligned}\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(A^n, N_i) &\cong \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(A, N_i)^n \\ &\cong (\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(A, N_i))^n \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(A, \varinjlim_{i\in I} N_i)^n \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(A^n, \varinjlim_{i\in I} N_i).\end{aligned}$$

Also ist A^n in $\mathscr{C}$ für alle $n \geq 0$. Sei jetzt

$$W \longrightarrow V \longrightarrow U \longrightarrow \{0\}$$

ein exakte Sequenz rechts mit V und W in $\mathscr{C}$. Die erste Zeile des Diagramms darunter ist exakt links nach Satz 13.6.

$$\begin{array}{ccccccc}\{0\} & \longrightarrow & \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(U, N_i) & \longrightarrow & \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(V, N_i) & \longrightarrow & \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(W, N_i) \\ & & \downarrow & & \| \wr & & \| \wr \\ \{0\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(U, \varinjlim_{i\in I} N_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(V, \varinjlim_{i\in I} N_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(W, \varinjlim_{i\in I} N_i)\end{array}$$

Es folgt, dass U in $\mathscr{C}$ ist. Sei schließlich

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz rechts. Da A^m und A^n in $\mathscr{C}$ sind folgt, dass M in $\mathscr{C}$ ist.

Zu (ii)⇒(i). Angenommen gilt (ii). Nach Satz 13.21 existiert ein gerichtetes System von endlich präsentierbaren A-Moduln $M_\bullet$ mit

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \cong M.$$

Da

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, M_i) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim_{i\in I} M_i)$$

gibt es ein Element $i \in I$ und eine A-lineare Abbildung $u : M \longrightarrow M_i$ so, dass die Komposition von u mit der kanonischen Abbildung $M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i \cong M$ die Identität von M ist. Also ist $M_i \cong M \oplus M'$. Da M_i endlich präsentierbar ist, so folgt, dass M endlich präsentierbar ist, nach Satz 13.19. □

Aufgabe 13.24. Sei M ein A-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften Äquivalent sind.

(i) Der A-Modul M ist endlich erzeugt.

(ii) Für jede gerichtete Menge und jedes gerichtete System $N_\bullet$ von A-Moduln ist die kanonische A-lineare Abbildung

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M, N_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim_{i \in I} N_i)$$

injektiv.

Aufgabe 13.25. Sei

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz rechts von A-Moduln, mit M und N endlich präsentierbar. Zeigen Sie, dass P endlich präsentierbar ist. *Hinweis.* Benützen Sie Eigenschaft (ii) von Satz 13.23.

Kapitel 14

Flachheit

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 14.1. Ein A-Modul V ist *flach*, falls, für jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

ist

$$\{0\} \longrightarrow V \otimes_A M \xrightarrow{id_V \otimes f} V \otimes_A N \xrightarrow{id_V \otimes g} V \otimes_A P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz.

Eine A-Algebra B ist *flach*, falls B flach als A-Modul ist. Man sagt auch, dass der Ringhomomorphismus *flach* ist.

Beispiel 14.2. Ist K ein Körper, so ist jeder K-Modul flach.

Beispiel 14.3. Sei X eine Menge. Dann ist $A^{(X)}$, der freie A-Modul erzeugt von X, flach: ist

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln, so ist

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A^{(X)} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & A^{(X)} \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & A^{(X)} \otimes_A P \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus_X M \arrow[r] & \bigoplus_X N \arrow[r] & \bigoplus_X P \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

exakt.

Beispiel 14.4. Sei $S \subset A$ eine Multiplikative Menge. Dann ist $S^{-1}A$ flach über A: es ist Satz 4.8 zusammen mit Korollar 12.13.

Aufgabe 14.5. Zeigen Sie, dass der Polynomring A[X] flach über A ist.

Satz 14.6. *Seien* V *und* W *zwei flachen* A*-Moduln. Dann ist* $V \otimes_A W$ *flach.*

Beweis. Einfach. □

Satz 14.7. *Seien* B *eine kommutative flache* A*-Algebra. Ist* V *ein flacher* B*-Modul, so ist* V *flach als* A*-Modul.*

Beweis. Sei

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist die erste Reihe des Diagramms darunter

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & V \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & V \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & V \otimes_A P \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & V \otimes_B (B \otimes_A M) \arrow[r] & V \otimes_B (B \otimes_A N) \arrow[r] & V \otimes_B (B \otimes_A P) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Da die zweite Reihe isomorph zu der ersten, nach Satz 12.25, ist sie eine exakte Sequenz. □

Korollar 14.8. *Seien* B *eine kommutative flache* A*-Algbra und* C *eine kommutative flache* B*-Algebra. Dann ist* C *eine flache* A*-Algebra.*

Satz 14.9. *Seien* B *und* C *zwei kommutativen* A*-Algebren. Ist* B *flach über* A*, so ist das Tensorprodukt* $B \otimes_A C$ *flach über* C.

Beweis. Sei

$$\{0\} \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von C-Moduln. Es ist dann

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & (B \otimes_A C) \otimes_C M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & (B \otimes_A C) \otimes_C N \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & (B \otimes_A C) \otimes_C P \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & B \otimes_A M \arrow[r] & B \otimes_A N \arrow[r] & B \otimes_A P \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

einen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen. □

Satz 14.10. *Sei* V *ein* A*-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der* A*-Modul ist flach.*

(ii) *Für jede injektive* A*-lineare Abbildung* $f : M \longrightarrow N$ *ist die Abbildung* $\mathrm{id}_V \otimes f : V \otimes_A M \longrightarrow V \otimes_A N$ *injektiv.*

(ii') *Für jede injektive* A*-lineare Abbildung* $f : M \longrightarrow N$ *mit* N *endlich erzeugt ist die Abbildung* $\mathrm{id}_V \otimes f : V \otimes_A M \longrightarrow V \otimes_A N$ *injektiv.*

(ii") *Für jede injektive* A*-lineare Abbildung* $f : M \longrightarrow N$ *mit* N *endlich präsentierbar ist die Abbildung* $\mathrm{id}_V \otimes f : V \otimes_A M \longrightarrow V \otimes_A N$ *injektiv.*

(iii) *für jede kurze exakte Sequenz von* A*-Moduln*

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

mit N *endlich präsentierbar ist*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{id_{\mathrm{V}} \otimes f} \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \xrightarrow{id_{\mathrm{V}} \otimes g} \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{P} \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz.

Beweis. Nach Satz 12.7 gilt (i)⇔(ii) und analog (ii")⇔(iii). Es ist klar (ii)⇒(ii')⇒(ii"). Daher ist es genug zu zeigen, dass (ii")⇒(ii) gilt. Sei $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ eine injektive A-lineare Abildung. Nach Satz 13.21 existiert eine gerichtete Menge I und ein gerichtetes System von endlich präsentierbaren A-Moduln $\mathrm{N}_\bullet$ indexiert durch I mit

$$\varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i \cong \mathrm{N}.$$

Für jedes $i \in \mathrm{I}$ induziert die kanonische A-lineare Abbildung $\ell_i : \mathrm{N}_i \longrightarrow \mathrm{N}$ eine A-lineare Abbildung $u_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}$, wobei $\mathrm{M}_i = \mathrm{M} \times_{\mathrm{N}} \mathrm{N}_i$ und $u_i(x, y_i) = x$ für alle $x \in \mathrm{M}$ und $y_i \in \mathrm{N}_i$ mit $f(x) = \ell_i(y_i)$ gilt. Die induzierte Abbildung

$$\varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}$$

ist bijektiv, nach Satz 13.6. Das heißt, dass die Abbildung f ein gerichteter Limes von der injektiven Abbildungen $f_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{N}_i$ definiert durch $f_i(x, y_i) = y_i$ ist. Nach Satz 13.16 ist dann die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes f : \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ ein gerichteter Limes von der Abbildungen $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes f_i : \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}_i$. Gilt (iii'), so ist $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes f$ injektiv, nach Korollar 13.7. □

Hilfsatz 14.11. *Sei* A *ein noetherscher Ring und* $\mathfrak{a} \subset \mathrm{A}$ *ein Ideal. Sei* $\widehat{\mathrm{A}}$ *die* $\mathfrak{a}$*-adische Vervollständigung von* A. *Ist* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul mit* $\mathfrak{a}$*-adische Vervollständigung* $\widehat{\mathrm{M}}$*, so ist*

$$\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \cong \widehat{\mathrm{M}}.$$

Beweis. Wir wählen eine exakte Sequenz rechts der Form

$$\mathrm{A}^m \xrightarrow{f} \mathrm{A}^n \xrightarrow{g} \mathrm{M} \longrightarrow \{0\}.$$

Sie induziert zwei kurzen exakten Sequenzen

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}^m \longrightarrow \mathrm{Q} \longrightarrow \{0\}$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}^n \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \{0\}.$$

mit $\mathrm{K} = \ker(f)$ und $\mathrm{Q} = \mathrm{im}(f)$. Daher haben wir zwei exakten Sequenzen

$$\{0\} \longrightarrow \widehat{\mathrm{K}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}}^m \longrightarrow \widehat{\mathrm{Q}} \longrightarrow \{0\}$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \widehat{K} \longrightarrow \widehat{A}^n \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \{0\}$$

nach Korollar 11.28. Äquivalent ist

$$\widehat{A}^m \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{A}^n \xrightarrow{\hat{g}} \widehat{M} \longrightarrow \{0\}$$

exakt rechts. Schließlich erhalten ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
\widehat{A} \otimes_A A^m \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \widehat{A} \otimes_A A^n \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes g"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \widehat{A} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
\widehat{A}^m \arrow[r, "\hat{f}"] & \widehat{A}^n \arrow[r, "\hat{g}"] & \widehat{M} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

und nach Korollar 2.3 gilt dann $\widehat{A} \otimes_A M \cong \widehat{M}$. □

Satz 14.12. *Sei* A *ein noetherscher Ring und* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein Ideal. Die* $\mathfrak{a}$*-adische Vervollständigung* $\widehat{A}$ *ist flach über* A.

Beweis. Folgt von Hilfsatz 14.11, Korollar 11.28 und Satz 14.10. □

Aufgabe 14.13. Sei A ein kommutativer Ring und sei $M_\bullet$ ein gerichtetes System von flachen A-Moduln. Zeigen Sie, dass $\varinjlim_{i \in I} M_i$ flach ist.

Aufgabe 14.14. Sei A ein Hauptidealring.

(a) Sei $a \in A$ keine Einheit. Zeigen Sie, dass $A/(a)$ nicht flach über A ist. *Hinweis.* Betrachten Sie die injektive A-lineare Abbildung $x \longmapsto a \cdot x$.

(b) Sei V ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie, dass V genau dann flach ist, wenn $V \cong A^n$ für eine $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Sei V ein A-Modul. Angenommen ist V ohne Torsion: das heißt, dass $a \cdot x \neq 0$ für alle $a \neq 0$ in A und $x \neq 0$ in V gilt. Zeigen Sie, dass V eine gerichteter Limes von flachen endlich erzeugten A-Modul ist. Zeigen Sie dann, dass V flach ist.

Kapitel 15

Elementare Homologische Algebra

Sei R ein Ring und sei

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\}$$

eine Kurze exakte Sequenz von R-Modul. Ist V ein beliebiger R-Modul, so sind

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N,V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(V,M) \longrightarrow \{0\}$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(V,M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(V,N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(V,P) \longrightarrow \{0\}$$

keine exakte Sequenzen im allgemeiner. Analog, ist R kommutativ, so ist

$$\{0\} \longrightarrow V \otimes_A M \xrightarrow{id_V \otimes f} V \otimes_A N \xrightarrow{id_V \otimes g} V \otimes_A P \longrightarrow \{0\}$$

keine exakte Sequenz im allgemeiner. Die Nicht-Exaktheit wird dabei durch die *Homologie* gemessen.

15.1 Kettenkomplexe und Homologie

Definition 15.1. Ein *Kettenkomplex von* R-*Moduln*, oder ein R-*Kettenkomplex* ist ein paar $C = (C_*, d_*)$, wobei

(a) $C_* = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von R-Moduln (den sogenannten *Kettenmoduln*)

(b) $(d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von R-linearen Abbildungen (den *Randoperatoren* oder *Differentialen*) mit

$$d_{n-1} \circ d_n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$

ist.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Sei $n \in \mathbb{Z}$.

- Die Elemente von C_n heißen *n-Ketten*.

- Die Elemente von $Z_n(C) = \ker(d_n)$ heißen *n-Zykel*
- Die Elemente von $B_n(C) = \operatorname{im}(d_{n+1})$ heißen *n-Ränder*.

Es ist $B_n(C) \subset Z_n(C)$ (da $d_{n-1} \circ d_n = 0$). Die *n-the Homologie von* C ist der R-Modul

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C).$$

Beispiel 15.2. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung. Wir definieren $C_1 = M$, $C_0 = N$, $C_i = \{0\}$ für $i \notin \{0,1\}$ und $d_1 = f$. Es ist dann

$$H_n(C) = \begin{cases} \ker(f) & \text{falls } n = 1, \\ \operatorname{coker}(f) & \text{falls } n = 0, \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 15.3. Seien $C = (C_*, d_*)$ und $C' = (C'_*, d'_*)$ zwei R-Kettenkomplexe. Ein R-*Kettenabbildung* $f : C \longrightarrow C'$ ist eine Familie von R-linearen Abbildungen $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ indexiert durch $n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ {\scriptstyle d_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d'_n} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array} \qquad d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Notiz 15.4 (Homologie als Funktor). Sei $f : C \longrightarrow C'$ eine R-Kettenabbildung. Die Abbildung f_n sendet $Z_n(C)$ bzw. $B_n(C)$ in $Z_n(C')$ bzw. $B_n(C')$. Es gibt dann genau eine R-lineare Abbildung

$$H_n(f) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C')$$

für alle n, so dass $H_n(f)(\bar{x}) = \overline{f_n(x)}$ für jedes n-Zykel x gilt. Ist f die Identität von C_n für alle n, so ist $H_n(f)$ die Identität von $H_n(C)$ für alle n. Diese Konstruktion ist vereinbar mit Komposition: ist $g : C' \longrightarrow C''$ noch eine R-Kettenabbildung, so gilt

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f)$$

für alle n.

Definition 15.5. Seien $f, g : C \longrightarrow C'$ zwei R-Kettenabbildungen.
Eine *Kettenhomotopie von f nach g* ist eine Familie von R-linearen Abbildungen der Form $h_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
Dei R-Kettenabbildung f und g sind *Kettenhomotop*, wenn es eine Kettenhomotopie von f nach g gibt. Man schreibt dann $f \simeq_R g$.

Notiz 15.6. Es ist $\simeq_R$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller R-Kettenabbildungen von C nach C′. Genauer, sei $\mathrm{Hom}_R(C,C')$ die Menge von R-Kettenabbildungen von C nach C′. Es ist ein Untermodul von $\prod_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_R(C_n,C'_n)$. Sei $N(C,C')$ der Untermodul von R-Kettenabbildungen φ mit $\varphi \simeq_R 0$. Dann sind f und g Kettenhomotop genau dann, wenn $f-g\in N(C,C')$. Wir bezeichnen

$$[C,C'] = \mathrm{Hom}_R(C,C')/N(C,C')$$

der R-Modul von R-Kettenabbildungen modulo Kettenhomotopie. Die Komposition einer R-Kettenabbildung mit einer R-Kettenabbildung, die Kettenhomotop zu Null ist Kettenhomotop zu Null ist. Daher gibt es eine wohldefinierte R-bilineare Abbildung

$$[C,C']\times[C',C'']\longrightarrow[C,C'']$$

von Komposition von R-Kettenhomotopieäaquivalenzklassen von R-Kettenabbildungen.

Definition 15.7. Eine R-Kettenabbildung $f: C\longrightarrow C'$ ist eine *Kettenhomotopieäquivalenz*, wenn es eine R-Kettenabbildung $g: C'\longrightarrow C$ mit $g\circ f\simeq_R \mathrm{id}_C$ und $f\circ g\simeq_R \mathrm{id}_{C'}$ gibt. In diesem Fall nennen wir C und C′ *Kettenhomotopieäquivalent* und schreiben $C\simeq_R C'$.

Satz 15.8. *Seien $f,g: C\longrightarrow C'$ zwei R-Kettenabbildungen. Sind f und g kettenhomotop, so gilt*

$$H_n(f)=H_n(g): H_n(C)\longrightarrow H_n(C')$$

für alle $n\in\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $x\in Z_n(C)$. Dann gilt:

$$f_n(x)-g_n(x) = d'_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x))$$
$$d'_{n+1}(h_n(x))\in B_n(C').$$

Also gilt $H_n(f)(\bar{x}) = H_n(g)(\bar{x})$. □

Korollar 15.9. *Sei $f: C\longrightarrow C'$ eine Kettenhomotopieäquivalenz. Dann ist die R-lineare Abbildung*

$$H_n(f): H_n(C)\longrightarrow H_n(C')$$

für jede $n\in\mathbb{Z}$ bijektiv.

Korollar 15.10. *Aus $C\simeq_R C'$ folgt $H_n(C)\cong H_n(C')$ für alle n.*

Definition 15.11. Ein *Quasi-Isomorphismus* ist eine R-Kettenabbildung $f: C\longrightarrow C'$, so dass $H_n(f): H_n(C)\longrightarrow H_n(C')$ für alle n ein Isomorphismus ist.

Zum Beispiel ist jede Kettenhomotopieäquivalenz ein Quasi-Isomorphismus.

Notiz 15.12. Sei C ein Kettenkomplex und $n \in \mathbb{Z}$. Es gibt eine R-lineare Abbildung

$$\delta_{n+1} : C_{n+1}/B_{n+1}(C) \longrightarrow Z_n(C)$$

induziert von der Abbildung $d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow Z_n(C)$. Da $Z_{n+1}(C) = \ker(d_{n+1})$ ist

$$\ker(\delta_{n+1}) = Z_{n+1}(C)/B_{n+1}(C) = H_{n+1}(C).$$

Es ist auch $\mathrm{im}(\delta_{n+1}) = B_n(C)$ und daher gilt

$$\mathrm{coker}(\delta_{n+1}) = H_n(C).$$

Satz 15.13 (lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von R*-Kettenkomplexen (d.h. die entsprechenden Sequenzen in jedem Grad sind exakt). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots$$

Die Abbildung ∂_n heißt der Verbindungshomomorphismus. *Diese lange exakte Sequenz ist natürlich: ist*

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R*-Kettenkomplexen mit exakten Zeilen, so ist das zugehörige Leiterdiagramm*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, "H_n(u)"] & H_n(D) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d, "H_n(v)"] & H_n(E) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(w)"] & H_{n-1}(C) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"] \arrow[d, "H_{n-1}(u)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f')"] & H_n(D') \arrow[r, "H_n(g')"] & H_n(E') \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(C') \arrow[r, "H_{n-1}(f')"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen.

Beweis. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & D_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{n+1}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] & D_n \arrow[r, "g_n"] & E_n \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

und dem Schlangenlemma folgt für alle n eine exakte Sequenz der Form:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & Z_{n+1}(C) \arrow[r, "Z_{n+1}(f)"] & Z_{n+1}(D) \arrow[r, "Z_{n+1}(g)"] & Z_{n+1}(E) \arrow[dlll, out=-10, in=170] & \\
C_{n+1}/B_{n+1}(C) \arrow[r, "\bar{f}"] & D_{n+1}/B_{n+1}(D) \arrow[r, "\bar{g}"] & E_{n+1}/B_{n+1}(E) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Daher gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1}/B_{n+1}(C) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & D_{n+1}/B_{n+1}(D) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & E_{n+1}/B_{n+1}(E) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r, "Z_n(f)"] & Z_n(D) \arrow[r, "Z_n(g)"] & Z_n(E) &
\end{tikzcd}$$

Aus einer zweiten Anwendung des Schlangenlemmas erhalten wir die lange exakte Sequenz. □

15.2 Projektive Auflösungen

Definition 15.14. Ein R-Modul heißt *projektiv*, wenn er die folgende Liftungseigenschaft besitzt: für jede surjektive R-lineare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ und jede R-lineare Abbildung $v : P \longrightarrow N$ gibt es eine R-lineare Abbildung $u : P \longrightarrow M$ mit $f \circ u = v$. Äquivalent: für jede surjektive R-lineare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist die zugehörige Abbildung

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

surjektiv.

Beispiel 15.15. Sei P ein R-Modul. Besitzt P eine Basis $(e_i)_{i\in I}$, so ist P projektiv: ist $f : M \longrightarrow N$ eine surjektive Abbildung und $v : P \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung, so wählen wir für jedes $i \in I$ ein Element $x_i \in M$; es gibt dann genau eine R-lineare Abbildung $u : P \longrightarrow M$ definiert bestimmt durch $u(e_i) = x_i$ für alle $i \in I$, und es gilt $f \circ u = v$.
Insbesondere ist $R^{(X)}$ für jede Menge X projektiv.

Beispiel 15.16. Sei A ein kommutativer Integritätsring und sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal mit $\{0\} \neq \mathfrak{a}$. Dann ist $A/\mathfrak{a}$ nicht projektiv als A-Modul: sei $A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion und sei $v : A/\mathfrak{a} \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ die Identität; wäre eine A-lineare Abbildung $u : A/\mathfrak{a} \longrightarrow A$, mit x das Bild durch u von der Restklasse von 1 hätten wir $a.x = a \cdot u(f(1)) = u(f(a)) = 0$ für alle $a \in \mathfrak{a}$, im Widerspruch zur Integrität von A.

Satz 15.17. *Sei* P *ein* R*-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) Der R*-Modul* P *ist projektiv.*

(ii) Der R*-Modul ist ein direkter Summand in einem freien* R*-Modul: es gibt Menge* X *und einen* R*-Modul* Q *mit* $A^{(X)} \cong P \oplus Q$.

(iii) Für jede kurze exakte Sequenz von R*-Moduln*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

ist das zugehörige Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, M'') \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz.

Beweis. Folgt direkt aus Aufgabe 1.17. □

Korollar 15.18. *Jeder projektive* R*-Modul ist flach.*

Beweis. Sei P ein projektiver R-Modul. Sei X eine Menge und sei Q ein R-Modul mit

$$A^{(X)} \cong P \oplus Q.$$

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine injektive R-lineare Abbildung. Wir werden zeigen, dass die Abbildung

$$\mathrm{id}_P \otimes f : P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R N$$

injektiv ist. Für $V = A^{(X)}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{id}_V \otimes f : V \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R N$$

injektiv. Aber es ist

$$V \otimes_R W \cong (P \otimes_R W) \oplus (Q \otimes_R W)$$

für alle R-Moduln W. Ist $x \in P \otimes_R M$ mit $(\mathrm{id}_P \otimes f)(x) = 0$, so gilt

$$(\mathrm{id}_P \otimes f)(x) = (\mathrm{id}_P \otimes f)(x) + (\mathrm{id}_Q \otimes f)(0) = (\mathrm{id}_V \otimes f)(x + 0) = 0.$$

Daher gilt $x + 0 = 0$ in $V \otimes_R M \cong (P \otimes_R M) \oplus (Q \otimes_R M)$, somit $x = 0$. □

Aufgabe 15.19. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ flach aber kein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 15.20. Sei A ein kommutativer Ring und sei B eine A-Algebra. Zeigen Sie, dass für jeden projektive A-Modul P das B-Modul $B \otimes_A P$ projektiv ist.

Aufgabe 15.21. Sei A ein lokaler kommutativer Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei P ein projektiver endlich erzeugter A-Modul. Seien $e_1, \ldots, e_n \in P$ Elemente deren Restklassen modulo $\mathfrak{m}P$ eine Basis von $P/\mathfrak{m}P$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum bilden. Zeigen Sie, dass $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von P als A-Modul bilden. *Hinweis.* Benützen Sie zweimal das Krull-Nakayama-Lemma (4.15).

Aufgabe 15.22. Sei A ein kommutativer Ring und sei P ein endlich präsentierbarer A-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Der A-Modul P ist projektiv.

(ii) Für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset A$ der $A_\mathfrak{q}$-Modul $P_\mathfrak{q}$ ist projektiv.

(iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ der $A_\mathfrak{m}$-Modul $P_\mathfrak{m}$ ist projektiv.

(iv) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $P_\mathfrak{m} \cong (A_\mathfrak{m})^n$.

(v) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ gibt es $f \notin \mathfrak{p}$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit $P[f^{-1}] \cong A[f^{-1}]^n$.

Hinweis. Zu (v)⇒(i), benützen Sie Aufgabe 13.14 und Satz 13.23.

Definition 15.23. Sei M ein R-Modul. Eine *projektive Auflösung von* M ist ein Paar (P, ε), wobei:

- $P = (P_*, d_*)$ ein R-Kettenkomplex ist,
- für jedes $n < 0$, $P_n = \{0\}$ gilt,
- für jedes $n \in \mathbb{Z}$, der R-Modul P_n projektiv ist,
- $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ eine R-lineare Abbildung ist,
- $H_n(P) = \{0\}$ für jedes $n > 0$ und ε einen Isomorphismus $H_0(P) \cong M$ induziert.

Notiz 15.24. Sei M ein R-Modul. Wir schreiben auch M für den R-Kettenkomplex definiert durch $M_n = \{0\}$ für alle $n \neq 0$ und $M_0 = M$. Sei $C = (C_*, d_*)$ ein R-Kettenkomplex mit $C_n = \{0\}$ für $n < 0$. Ein R-Kettenabbildung $\varepsilon : C \longrightarrow M$ ist dann einfach eine R-lineare Abbildung $\varepsilon : C_0 \longrightarrow M$. Es ist $\varepsilon : C \longrightarrow M$ genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn die folgende Eigenschaften gelten:

- $H_n(C) = \{0\}$ für $n \neq 0$;
- $\varepsilon : C_0 \longrightarrow M$ ist surjektiv;
- Der Kern von $\varepsilon : C \longrightarrow M$ ist das Bild von $d_1 : C_1 \longrightarrow C_0$.

Satz 15.25. *Jeder* R*-Modul bekommt eine projektive Auflösung.*

Beweis. Sei M ein R-Modul. Wir definieren $P_n(M) = \{0\}$ für $n < 0$ und $P_0(M) = \bigoplus_M R = R^{(M)}$ und $\varepsilon_M : P_0(M) \longrightarrow M$ die R-lineare Abbildung bestimmt durch $\varepsilon(i(x)) = x$ für alle $x \in M$, wobei $i : M \longrightarrow R^{(M)}$ die kanonische Abbildung ist. Wir definieren $d_0 = 0 : P_0(M) \longrightarrow P_{-1}(M)$. Ist $n > 0$ mit $d_i : P_i(M) \longrightarrow P_{i-1}(M)$ schon definiert für $i < n$, so definieren wir

$$P_n(M) = P_0(\ker(d_{n-1}))$$

und $d_n : P_n(M) \longrightarrow P_{n-1}(M)$ durch $d_n(x) = \varepsilon_{\ker(d_{n-1})}(x)$. Es ist $P(M) = (P_*(M), d_*)$ ein R-Kettenkomplex und $(P(M), \varepsilon_M)$ eine Auflösung von M. □

Notiz 15.26. Der Beweis oben zeigt besser: es gibt eine funktorielle Auflösung. Ist $f : M \longrightarrow N$ eine R-lineare Abbildung, so gibt es eine R-Kettenabbildung $P(f) : P(M) \longrightarrow P(N)$ mit $\varepsilon_N \circ P(f) = f \circ \varepsilon_M$

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, "P(f)"'] & M \arrow[d, "f"] \\ P(N) \arrow[r, "\varepsilon_N"] & N \end{tikzcd}$$

Es gibt tatsächlich eine R-lineare Abbildung $P_0(f) : P_0(M) \longrightarrow P_0(N)$ definiert durch $P_0(f)(i(x)) = i(f(x))$ für alle $x \in M$, und dann definieren wir $P_n(f)$ induktiv über n.

Aufgabe 15.27. Sei A ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter Ring. Zeigen Sie, dass es eine projektive Auflösung (P, ε) von M gibt, sodass P_n projektiv und endlich erzeugt für jedes n ist.

Satz 15.28 (Fundamentalsatz der homologischen Algebra)**.** *Sei* $f : M \longrightarrow N$ *eine* R*-lineare Abbildung. Sei* $C = (C_*, d_*)$ *ein* R*-Kettenkomplex mit* $C_n = \{0\}$ *für* $n < 0$*, und sei* $\eta : C \longrightarrow N$ *ein Quasi-Isomorphismus. Ist* (P, ε) *eine projektive Auflösung von* M*, so gibt es eine* R*-Kettenabbildung* $\varphi : P \longrightarrow C$ *mit* $\eta \circ \varphi = f \circ \varepsilon$*.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\varphi"'] & M \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\eta"] & N \end{tikzcd}$$

Außerdem, ist $\psi : P \longrightarrow C$ *eine zweite* R*-Kettenabbildung mit* $\eta \circ \psi = f \circ \varepsilon$*, so sind* φ *und* ψ *kettenhomotop.*

Beweis. Existenz. Wir konstruieren R-lineare Abbildungen $\varphi_n : P_n \longrightarrow C_n$ induktiv. Es ist $\varphi_n = 0$ für $n < 0$. Da $\eta : C_0 \longrightarrow N$ surjektiv ist, und da P_0 projektiv ist, existiert eine R-lineare Abbildung $\varphi_0 : P_0 \longrightarrow C_0$ mit

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"'] & M \arrow[d, "f"] \\ C_0 \arrow[r, "\eta"] & N \end{tikzcd}$$

kommutativ. Angenommen ist jetzt $n > 0$ und gibt es $\varphi_i : P_i \longrightarrow C_i$ für alle $i < n$, so dass

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & P_{i-1} \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] \\ C_i \arrow[r, "d_i"] & C_{i-1} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann induziert φ_{n-1} eine R-lineare Abbildung $\bar{\varphi}_{n-1} : Z_{n-1}(P) \longrightarrow Z_{n-1}(C)$. Da die Abbildung $d_n : C_n \longrightarrow Z_n(C)$ surjektiv ist und da P_n projektiv ist, existiert eine R-lineare Abbildung $\varphi_n : P_n \longrightarrow C_n$ mit

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dotted, "\varphi_n"'] & Z_{n-1}(P) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{\varphi}_{n-1}"] & P_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ C_n \arrow[r, "d_n"] & Z_n(C) \arrow[r, hook] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Eindeutigkeit (bis auf Kettenhomotopie). Sei $\psi : P \longrightarrow C$ eine zweite R-Kettenabbildung mit $\eta \circ \psi = f \circ \varepsilon$. Es ist dann das Quadrat

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\varphi-\psi"'] & M \arrow[d, "0"] \\ C \arrow[r, "\eta"] & N \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ohne Einschränkung ist dann $f = 0$ und $\varphi = 0$. Induktiv werden wir R-lineare Abbildungen $h_n : P_n \longrightarrow C_{n+1}$ mit $\psi_n = d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$ für alle n konstruieren. Es ist $h_n = 0$ für alle $n < 0$. Es ist $\operatorname{im}(\psi) \subset \ker(\eta)$ und $d_1 : C_1 \longrightarrow \ker(\eta)$ surjektiv. Da P_1 projektiv ist gibt es eine R-lineare Abbildung $h_0 : P_0 \longrightarrow C_1$ mit

$$\psi_0(x) = d_1(h_0(x)) + 0 = d_1(h_0(x)) + h_{-1}(d_0(x))$$

für alle $x \in P_0$. Sei $n > 0$. Es ist $x \longmapsto \psi_n(x) - h_{n-1}(d_n(x))$ eine R-lineare Abbildung von P_n nach $Z_n(C)$ da

$$d_n(\psi_n(x) - h_{n-1}(d_n(x))) = \psi_{n-1}(d_n(x)) - (\psi_{n-1}(d_n(x)) - h_{n-2}(d_{n-1}(d_n(x)))) = h_{n-2}(0) = 0$$

gilt. Da $d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow Z_n(C)$ surjektiv ist gibt es eine R-lineare Abbildung $h_n : P_n \longrightarrow C_{n+1}$ mit

$$d_{n+1}(h_n(x)) = \psi_n(x) - h_{n-1}(d_n(x))$$

für alle $x \in P_n$. □

Korollar 15.29 (Eindeutigkeit projektiver Auflösungen)**.** *Sei* M *ein* R*-Modul. Dann gibt es bis auf* R*-Kettenhomotopieäquivalenz genau eine projektive Auflösung von* M*.*

Beweis. Nach Satz 15.25 ist es genug die Eindeutigkeit bis auf R-Kettenhomotopieäquivalenz zu zeigen. Seien (P, ε) und (Q, η) zwei projektive Auflösungen von M. Es gibt dann nach Satz 15.28 zwei R-Kettenabbildungen $\varphi : P \longrightarrow Q$ und $\psi : Q \longrightarrow P$ mit $\eta \circ \varphi = \mathrm{id}_M$ und $\varepsilon \circ \psi = \mathrm{id}_M$. Aus

$$\varepsilon \circ (\psi \circ \varphi) = \varepsilon = \varepsilon \circ \mathrm{id}_M$$

erhalten wir die Existenz einer Kettenhomotopie von $\psi \circ \varphi$ nach id_M. Gleichweise sind $\varphi \circ \psi$ und id_M Kettenhomotop. □

Satz 15.30 (Hufeisenlemma)**.** *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von R*-Moduln. Angenommen ist* (P', ε') *bzw.* (P'', ε'') *eine projektive Auflösung von* M′ *bzw. von* M″*. Dann gibt es eine projektive Auflösung* (P, ε) *von* M *und ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Form*

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & P' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\varepsilon"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen.

Beweis. Wir definieren $P_n = P'_n \oplus P''_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Abbildung $\tilde{f}_n$ ist die Inklusion von P'_n in P_n und die Abbildung $\tilde{g}_n : P_n \longrightarrow P''_n$ die Projektion. Da g surjektiv ist und P''_0 projektiv ist existiert eine R-lineare Abbildung $u : P''_0 \longrightarrow M$ mit $g \circ u = \varepsilon''$. Wir definieren $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ durch $\varepsilon(x' + x'') = f(\varepsilon'(x')) + u(x'')$ für alle $x' \in P'_0$ und $x'' \in P''_0$. Es ist

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & P_0 & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & P''_0 & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Da die Abbildungen $\varepsilon, \varepsilon'$ und ε'' surjektiv sind folgt aus dem Schlangenlemmma, dass

$$\{0\} \longrightarrow \ker(\varepsilon') \xrightarrow{\tilde{f}_0} \ker(\varepsilon) \xrightarrow{\tilde{g}_0} \ker(\varepsilon'') \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz ist. Insbesondere gibt es eine R-lineare Abbildung

$$\delta_1 : P''_1 \longrightarrow \ker(\varepsilon)$$

mit $\tilde{g}_0(\delta_1(x'')) = d''_1(x'')$ für alle $x'' \in P''_1$. Wir definieren eine R-lineare Abbildung $d_1 : P_1 \longrightarrow P_0$ durch $d_1(x' + x'') = \tilde{f}_0(d'_0(x')) + \delta_1(x'')$. Es ist dann

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & P_1 & \xrightarrow{\tilde{g}_1} & P''_1 & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_1} & & \downarrow{\scriptstyle d_1} & & \downarrow{\scriptstyle d''_1} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & \ker(\varepsilon') & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & \ker(\varepsilon) & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & \ker(\varepsilon'') & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, indem d'_1 und d''_1 surjektiv sind. Daher ist $\ker(\varepsilon) = \mathrm{im}(d_1)$. Sei $Z_1(P) = \ker(d_1)$. Nach dem Schlangenlemma ist

$$\{0\} \longrightarrow Z_1(P') \xrightarrow{\tilde{f}_1} Z_1(P) \xrightarrow{\tilde{g}_1} Z_1(P'') \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz.

Für $n > 1$ definieren wir induktiv über n Randoperatoren $d_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$ wie folgt. Angenommen ist schon $d_{n-1} : P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2}$ wohldefiniert, sodass, mit $Z_{n-1}(P) = \ker(d_{n-1} : P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2})$,

$$\{0\} \longrightarrow Z_{n-1}(P') \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} Z_{n-1}(P) \xrightarrow{\tilde{g}_{n-1}} Z_{n-1}(P'') \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz ist. Es gibt dann eine R-lineare Abbildung $\delta_n : P''_n \longrightarrow Z_{n-1}(P)$ mit $\tilde{g}_{n-1}(\delta_n(x'')) = d''_n(x'')$ für alle $x'' \in P''_n$ gilt. Wir definieren die R-lineare Abbildung $d_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$ durch $d_n(x' + x'') = \tilde{f}_{n-1}(d'_n(x')) + \delta_n(x'')$. Es ist dann

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & P'_n & \xrightarrow{\tilde{f}_n} & P_n & \xrightarrow{\tilde{g}_n} & P''_n & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_n} & & \downarrow{\scriptstyle d_n} & & \downarrow{\scriptstyle d''_n} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & Z_{n-1}(P') & \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} & Z_{n-1}(P) & \xrightarrow{\tilde{g}_{n-1}} & Z_{n-1}(P'') & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen, indem d'_n und d''_n surjektiv sind. Daher ist $d_n : P_n \longrightarrow Z_{n-1}(P)$ surjektiv und, mit $Z_n(P) = \ker(d_n)$, ist das zugehörige Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(P') \xrightarrow{\tilde{f}_n} Z_n(P) \xrightarrow{\tilde{g}_n} Z_n(P'') \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz. □

15.3 Tor

Sei A ein kommutativer Ring. Ist $C = (C_*, d_*)$ ein Kettenkomplex und ist V ein A-Modul, so definieren wir den Kettenkomplex $C \otimes_A V$ durch $(C \otimes_A V)_n = C_n \otimes_A V$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit Randoperatoren $d_n \otimes \mathrm{id}_V : C_n \otimes_A V \longrightarrow C_{n-1} \otimes_A V$.

Hilfsatz 15.31. *Seien $f, g : C \longrightarrow C'$ zwei Kettenabbildungen. Sind f und g Kettenhomotop, so sind $f \otimes \mathrm{id}_V$ und $g \otimes \mathrm{id}_V$ Kettenhomotop.*

Beweis. Sei $(h_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie von f nach g. Also gilt

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$$

für alle n. Daher ist

$$\begin{aligned} f_n \otimes \mathrm{id}_V - g_n \otimes \mathrm{id}_V &= (f_n - g_n) \otimes \mathrm{id}_V \\ &= (d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n) \otimes \mathrm{id}_V \\ &= (d'_{n+1} \circ h_n) \otimes \mathrm{id}_V + (h_{n-1} \circ d_n) \otimes \mathrm{id}_V \\ &= (d'_{n+1} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (h_n \otimes \mathrm{id}_V) + (h_{n-1} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (d_n \otimes \mathrm{id}_V). \end{aligned}$$

Das heißt, dass $(h_n \otimes \mathrm{id}_V)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie von $f \otimes \mathrm{id}_V$ nach $g \otimes \mathrm{id}_V$ ist. □

Hilfsatz 15.32. *Sei $f : C \longrightarrow C'$ eine A-Kettenabbildung. Ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $f \otimes \mathrm{id}_V : C \otimes_A V \longrightarrow C' \otimes_A V$ für alle A-Moduln V.*

Beweis. Folgt direkt aus Hilfsatz 15.31. □

Definition 15.33 (Ableitung des Tensorproduktfunktors)**.** Sei N ein A-Modul. Für jeden A-Modul M wählt man die projektive Auflösung vom Beweis von Satz 15.25:

$$\varepsilon_M : P(M) \longrightarrow M.$$

Für jede natürliche Zahl n definieren wir $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ durch

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = H_n(P(M) \otimes_A N).$$

Satz 15.34. *Seien* (P,ε) *und* (Q,η) *projektive Auflösungen von* M. *Ist* $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}$ *eine* A*-Kettenabbildung mit* $\eta \circ f = \varepsilon$, *dann ist die induzierte Abbildung*

$$\mathrm{H}_n(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}) : \mathrm{H}_n(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{H}_n(\mathrm{Q} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})$$

für alle n *und* N *bijektiv. Außerdem, sind* $f, g : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}$ *zwei* A*-Kettenabbildungen mit* $\eta \circ f = \varepsilon$ *und* $\eta \circ g = \varepsilon$, *so gilt*

$$\mathrm{H}_n(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}) = \mathrm{H}_n(g \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})$$

für alle n *und* N. *Insbesondere, ist* $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}$ *eine* A*-Kettenabbildung mit* $\varepsilon \circ f = \varepsilon$, *so gilt*

$$\mathrm{H}_n(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_n(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})}$$

für alle n *und* N.

Beweis. Sei $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}$ eine A-Kettenabbildung mit $\eta \circ f = \varepsilon$. Nach Satz 15.28 gibt es eine A-Kettenabbildung $f' : \mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{P}$ mit $\varepsilon \circ f' = \eta$. Es ist dann $f' \circ f$ kettenhomotop zu der Identität von P, und, gleichweise, $f \circ f'$ kettenhomotop zu der Identität von Q. Also ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz. Aus Hilfsatz 15.32 und Korollar 15.9 ist dann $\mathrm{H}_n(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})$ für alle N und n ein Isomorphismus. □

Korollar 15.35. *Sei* (P,ε) *eine projektive Auflösung von* M. *Dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \cong \mathrm{H}_n(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})$$

für jede N *und* n.

Notiz 15.36. Es ist $\mathrm{N} \longmapsto \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ für jedes n ein Funktor: jede A-lineare Abbildung $f : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}'$ eine A-lineare Abbildung $f_* = \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(f,\mathrm{N}) : \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}'$ induziert, mit

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{N}})_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})} \quad \text{und} \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Für jede $n \in \mathbb{N}$ und jeden A-Modul ist $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ ein Funktor auch, da die kanonische projektive Auflösung $(\mathrm{P}(\mathrm{M}),\varepsilon_{\mathrm{M}})$ funktoriell ist. Diese funktorialität ist vereinbar mit dem Isomorphismus von Korollar 15.35: sei $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}'$ eine A-lineare Abbildung, und sei (P,ε) bzw. $(\mathrm{P}',\varepsilon')$ eine projektive Auflösung von M bzw. von M′. Wir wählen eine Kettenabbildung $\varphi : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}'$ mit $\varepsilon' \circ \varphi = f \circ \varepsilon$. Dann ist, nach dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (15.28) und Lemma 15.31 das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(f,\mathrm{N})"'] & \mathrm{H}_n(\mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})"] \\
\mathrm{Tor}_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}',\mathrm{N}) \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{P}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N})
\end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei die Isomorphismen aus Satz 15.35 kommen.

Satz 15.37. *Für jeden* A*-Modul gilt:* $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N$.

Beweis. Die exakte Sequenz rechts

$$P_1(M) \xrightarrow{d_1} P_0(M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M \longrightarrow \{0\}$$

die exakte Sequenz rechts

$$P_1(M) \otimes_A N \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_N} P_0(M) \otimes_A N \xrightarrow{\varepsilon_M \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \longrightarrow \{0\}$$

induziert. □

Satz 15.38. *Sei* M *ein* A*-Modul. Jede kurze exakte Sequenz von* A*-Moduln*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

natürlich induziert eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N'') \arrow[dll, "\partial_{n+1}"] \\
& \mathrm{Tor}^A_n(M,N') \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_1(M,N'') \arrow[dll, "\partial_1"] \\
& M \otimes_A N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes f"] & M \otimes_A N \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes g"] & M \otimes_A N'' \arrow[r] & \{0\}.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei (P, ε) eine projektive Auflösung. Es ist

$$\{0\} \longrightarrow P \otimes_A N' \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes f} P \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes g} P \otimes_A N'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Kettenkomplexen. Wir anwenden dann Satz 15.13 und erhalten die zugehörige lange exakte Homologiesequenz. □

Satz 15.39. *Sei* N *ein* A*-Modul. Jede kurze exakte Sequenz von* A*-Moduln*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

natürlich induziert eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M'',N) \arrow[dll, "\partial_{n+1}"] \\
& \mathrm{Tor}^A_n(M',N) \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_1(M'',N) \arrow[dll, "\partial_1"] \\
& M' \otimes_A N \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_N"] & M \otimes_A N \arrow[r, "g \otimes \mathrm{id}_N"] & M'' \otimes_A N \arrow[r] & \{0\}.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Satz 15.30 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & P' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\varepsilon"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, wobei (P,ε) bzw. (P',ε') bzw. (P'',ε'') eine projektive Auflösung ist. Es ist dann, für jede $n \in \mathbb{Z}$, $P_n = P'_n \oplus P''_n$, sodass

$$\{0\} \longrightarrow P' \otimes_A N \longrightarrow P \otimes_A N \longrightarrow P'' \otimes_A N \longrightarrow \{0\}$$

eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist. Nach Satz 15.35 gibt Satz 15.13 die gewünschte lange exakte Sequenz. □

Aufgabe 15.40. Sei M ein A- Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Der Modul M ist flach.

(ii) Für jeden A-Kettencomplex C und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt natürlich $H_n(C \otimes_A M) \cong H_n(C) \otimes_A M$.

(iii) Für jeden Quasi-Isomorphismus $f : C \longrightarrow D$ ist $f \otimes \mathrm{id}_M : C \otimes_A M \longrightarrow D \otimes_A M$ ein Quasi-Isomorphismus.

Satz 15.41. *Sei* N *ein flacher* A*-Modul. Dann gilt* $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \{0\}$ *für alle* M *und* $n > 0$.

Beweis. Sei M ein A-Modul und sei (P,ε) eine projektive Auflösung von M. Da N flach ist folgt, dass $\varepsilon \otimes \mathrm{id}_N : P \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ einen Quasi-Isomorphismus ist. Also gilt $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \{0\}$ für $n > 0$. □

Korollar 15.42. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A*-Moduln mit* P *projektiv. Dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(M,K)$$

für alle $n > 1$ *und es gibt eine kanonische exakte Sequenz der Form*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_A K \longrightarrow M \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow \{0\}.$$

Beweis. Es ist P flach nach Korollar 15.18. Wir anwenden dann Sätze 15.41 und 15.38. □

Satz 15.43. *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A*-Moduln mit* P *projektiv. Dann gilt*

$$\mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Tor}^A_n(K,N)$$

für alle $n > 1$ *und es gibt eine kanonische exakte Sequenz der Form*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_1(M,N) \xrightarrow{\partial_1} K \otimes_A N \longrightarrow P \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow \{0\}.$$

Beweis. Es ist P selbst eine projektive Auflösung von P. Also ist $\mathrm{Tor}^A_n(P,N) = H_n(P \otimes_A N) = 0$ für $n > 0$. Man anwendet dann Satz 15.39. □

Korollar 15.44. *Es ist* $\mathrm{Tor}^A_n(M,N) \cong \mathrm{Tor}^A_n(N,M)$ *für alle* A*-Moduln* M *und* N *und für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen Induktiv über $n \geq 0$. Für $n = 0$ haben wir einfach

$$M \otimes_A N \cong N \otimes_A M.$$

Für $n \geq 1$, für zwei A-Moduln M und N wählen wir eine kurze exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \longrightarrow \{0\}$$

mit P projektiv (z.B. $P = A^{(M)}$). Vom Diagramm mit exakten Zeilen darunter

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_1(N,M) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dotted] & N \otimes_A K \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & N \otimes_A P \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & N \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}^A_1(M,N) \arrow[r, "\partial_1"] & K \otimes_A N \arrow[r] & P \otimes_A N \arrow[r] & M \otimes_A N \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

folgt dann $\mathrm{Tor}^A_1(M,N) \cong \mathrm{Tor}^A_1(N,M)$.
Sei $n > 2$. Es ist dann

$$\mathrm{Tor}^A_n(M,N) \cong \mathrm{Tor}^A_{n-1}(K,N) \cong \mathrm{Tor}^A_{n-1}(N,K) \cong \mathrm{Tor}^A_n(N,M)$$

nach Induktionsvoraussetzung. □

Korollar 15.45. *Seien* M *und* N A*-Moduln. Für jede projektive Auflösung* (Q,η) *von* N *gilt*

$$\mathrm{Tor}^A_n(M,N) \cong H_n(M \otimes_A Q)$$

für alle $n \geq 0$.

Satz 15.46. *Sei* M *ein* A*-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) Der A*-Modul* M *ist flach.*

(ii) $\mathrm{Tor}^A_n(M,N) = \{0\}$ *für alle* A*-Moduln* N *und für alle* $n > 0$ *gilt.*

(iii) Es ist $\mathrm{Tor}_1(M,N) = \{0\}$ *für alle* A*-Moduln* N.

Beweis. Sei M mit $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \{0\}$ für alle $n > 0$ und für alle N. Von Satz 15.38 folgt, dann, dass M flach ist. Umgekehrt, ist M flach, so gilt $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(N,M) = \{0\}$ für $n > 0$. □

Aufgabe 15.47. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } i = 0, 1, \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 15.48. Sei

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln mit M″ flach. Zeigen Sie, dass, für jeden A-Modul N,

$$\{0\} \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln ist.

Aufgabe 15.49. Sei I eine gerichtete Menge und sei $M_\bullet$ ein gerichtetes System von A-Moduln indexiert durch I. Sei N ein A-Modul. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^A(M_i, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$$

gilt. Zeigen Sie, dass ein A-Modul M genau dann flach ist, wenn $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = \{0\}$ für jeden endlich präsentierbare A-Modul N gilt.

Aufgabe 15.50. Sei A ein Hauptidealring.

(i) Für dedes $a \in A$, zeigen Sie, dass es eine projektive Auflösung (P, ε) von $A/(a)$ gibt, so dass $P_n = \{0\}$ für alle $n \notin \{0, 1\}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}_n^A(M, A/(a)) = \{0\}$ für alle A-Moduln für $n > 1$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/(a)) = \{x \in M \mid a \cdot x = 0\}$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N \oplus N') \cong \mathrm{Tor}_n^A(M, N) \oplus \mathrm{Tor}_n^A(N', M)$$

für alle A-Moduln M, N und N′ gilt.

(v) Sei M ein A-Modul. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = \{0\}$ für alle $n > 1$ und für jeden A-Modul N gilt. Zeigen Sie, dass M genau dann flach ist, wenn

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/(a)) = \{0\}$$

für jedes $a \in A$ gilt.

(vi) Zeigen Sie, dass ein A-Modul M genau dann flach ist, wenn M ohne Torsion ist (das heißt, wenn $a \cdot x \neq 0$ für alle $a \neq 0$ in A und alle $x \neq 0$ in M ist).

Aufgabe 15.51. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen, mit B flach über A. Zeigen Sie, dass für alle A-Moduln M und N

$$B \otimes_A \operatorname{Tor}_n^A(M, N) \cong \operatorname{Tor}_n^B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

für jedes $n \geq 0$ gilt.

Aufgabe 15.52. Sei A ein kommutativer Ring und sei M ein A-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Der A-Modul M ist flach.

(b) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist der $A_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p}$ flach.

(b') Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist der A-Modul $M_\mathfrak{p}$ flach.

(c) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist der $A_\mathfrak{m}$-Modul $M_\mathfrak{m}$ flach.

(c') Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist der A-Modul $M_\mathfrak{m}$ flach.

Aufgabe 15.53. Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $k = A/\mathfrak{m}$.

(a) Sei $f : M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung mit N flach. Angenommen sind beide N und $\ker(f)$ endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn f einen Isomorphismus von k-Vektorräumen $k \otimes_A M \cong k \otimes_A N$ induziert.

(b) Sei M ein flacher endlich präsentierbarer A-Modul. Zeigen Sie, dass M projektiv ist.

Aufgabe 15.54. Sei A ein kommutativer Ring und sei M ein endlich präsentierbarer A-Modul. Zeigen Sie, dass M genau dann projektiv ist, wenn er flach ist.