INVARIANCE DE LA K-THÉORIE PAR ÉQUIVALENCES DÉRIVÉES

DENIS-CHARLES CISINSKI

Résumé. Ces notes ont pour but de démontrer que tout foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen raisonnables, induisant une équivalence au niveau des catégories homotopiques, définit une équivalence d'homotopie entre les spectres de K-théorie correspondants. Cela généralise un résultat bien connu de Thomason et Trobaugh. Les ingrédients de démonstration sont une généralisation du théorème d'approximation de Waldhausen et une caractérisation combinatoire simple des équivalences dérivées. On étudie par ailleurs la localisation simpliciale des catégories de Waldhausen. On démontre qu'un foncteur (homotopiquement) exact à droite induit une équivalence de catégories homotopiques si et seulement s'il induit une équivalence au niveau des localisations simpliciales. Cela permet de faire le lien avec la K-théorie des catégories simpliciales introduite par Toën et Vezzosi.

Abstract. The aim of these notes is to prove that any right exact functor between reasonable Waldhausen categories, that induces an equivalence at the level of homotopy categories, gives rise to a homotopy equivalence between the corresponding K-theory spectra. This generalizes a well known result of Thomason and Trobaugh. The ingredients, for this proof, are a generalization of the Waldhausen approximation theorem, and a simple combinatorial caracterization of derived equivalences. We also study simplicial localization of Waldhausen categories. We prove that a (homotopy) right exact functor induces an equivalence of homotopy categories if and only if it induces an equivalence of simplicial localizations. This allows to make the link with the K-theory of simplicial categories introduced by Toën and Vezzosi.

Table des matières

Introduction

Le but de ces notes est de démontrer que, tout foncteur exact à droite entre catégorie de Waldhausen raisonnables $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, et induisant une équivalence de catégories $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$, induit une équivalence d'homotopie $K(\mathcal{A}) \simeq K(\mathcal{A}')$

(théorème 2.15). Ce que nous appelons “catégorie de Waldhausen raisonnable” correspond à la notion de catégorie d'objets cofibrants ayant un objet nul (les factorisations n'étant pas nécessairement fonctorielles) et vérifiant de bonnes propriétés de saturation. La preuve de ce résultat d'invariance repose sur une description des équivalences dérivées par une propriété d'approximation étudiée dans le cadre plus général des catégories dérivables dans [Cis08] (voir le théorème 2.9), ce qui permet de se ramener au théorème d'approximation de Waldhausen, dont nous donnons une nouvelle démonstration (laquelle a aussi été dégagée, en substance, par Marco Schlichting dans [Sch06]), qui n'utilise pas l'existence de factorisations fonctorielles.

Outre le théorème de résolution de Quillen [Qui73], le premier résultat dans la direction de l'invariance de la K-théorie par équivalences dérivées est bien entendu le cas particulier où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des “catégories biWaldhausen compliciales”, et où Φ est un foncteur complicial, démontré par Thomason et Trobaugh [TT90] (voir aussi une légère généralisation dans [DG99]). D'autre part, Dugger et Shipley [DS04] ont ensuite démontré un cas particulier de ce théorème (lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des sous-catégories de Waldhausen de catégories modèles et lorsque Φ est la restriction d'une équivalence de Quillen définie au niveau des catégories de modèles environnantes). Sagave [Sag04], donne une preuve de ce résultat en faisant l'hypothèse qu'en outre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des sous-catégories de Waldhausen de catégories de modèles, mais sans restriction sur le foncteur Φ.

Toën et Vezzosi [TV04] ont démontré, dans le cadre des “bonnes” catégories de Waldhausen (sous-catégories de Waldhausen d'une catégorie de modèles), l'invariance de la K-théorie par équivalences simpliciales. Ils ont aussi démontré que la K-théorie d'une “bonne” catégorie de Waldhausen coïncide avec la K-théorie de sa localisation simpliciale. Nous retrouvons ces résultat pour des catégories de Waldhausen un peu plus générales, en démontrant qu'un foncteur exact à droite induit une équivalence simpliciale si et seulement s'il induit une équivalence au niveau des catégories homotopiques (théorème 3.25 et proposition 4.5).

On démontre que la fonctorialité de la K-théorie peut s'étendre au cas des foncteurs homotopiquement exacts à droite (proposition 4.3). On démontre de plus que l'on peut toujours strictifier les foncteurs homotopiquement exacts à droite en des foncteurs exacts à droite (4.12). Cette méthode de strictification montre par ailleurs que toute catégorie de Waldhausen raisonnable est équivalente à une sous-catégorie de Waldhausen d'une catégorie de modèles fermée simpliciale, et que tout foncteur (homotopiquement) exact à droite est équivalent à la restriction d'un foncteur de Quillen à gauche simplicial.

Signalons enfin que Blumberg et Mandell [BM07] ont eux aussi étudié l'invariance de la K-théorie par équivalence dérivée, et étendu la fonctorialité de la K-théorie aux foncteurs homotopiquement exacts à droite via une étude fine des localisations simpliciales des catégories de Waldhausen (dans le cadre des catégories de Waldhausen avec factorisations fonctorielles).

1. Approximation forte

1.1. Suivant [TT90], on appelle *catégorie de Waldhausen* les catégories avec cofibrations et équivalences faible au sens de [Wal85].

Une *catégorie de Waldhausen dérivable* est une petite catégorie d'objets cofibrants au sens de Brown [Bro73] admettant un objet nul. Autrement dit, c'est une catégorie de Waldhausen satisfaisant l'axiome de saturation (cf. [Wal85, 1.2]), et telle que tout objet admette un cylindre (non nécessairement fonctoriel), ce qui revient encore à demander que toute flèche u admette une factorisation de la forme $u = pi$, i étant une cofibration, et p une équivalence faible. Toute catégorie de Waldhausen dérivable est donc en particulier une catégorie dérivable à droite au sens de [Cis08]. Par exemple toute catégorie de Waldhausen satisfaisant l'axiome de saturation et l'axiome du cylindre (cf. [Wal85, 1.6]) est une catégorie de Waldhausen dérivable. On notera $\mathrm{w}\mathcal{A}$ la sous-catégorie des équivalences faibles d'une catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$, et $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}$ sa catégorie homotopique (obtenue en inversant formellement $\mathrm{w}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$).

La notion naturelle de morphisme de catégorie de Waldhausen dérivable est celle de foncteur exact à droite au sens de [Cis08] (laquelle correspond à celle de foncteur exact au sens de [Wal85]).

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable, une *sous-catégorie de Waldhausen dérivable de* $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ (au sens de [Wal85, 1.6]) dans laquelle toute flèche u admet une factorisation de la forme $u = pi$, i étant une cofibration, et p une équivalence faible. Il est immédiat qu'une telle catégorie de Waldhausen est en particulier dérivable.

Proposition 1.2. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable, alors pour tout ensemble ordonné fini E, la catégorie $\mathcal{A}^E$ des foncteurs de E vers $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable avec pour équivalences faibles (resp. cofibrations) les morphismes qui sont des équivalences faibles (resp. des cofibrations) argument par argument.*

Démonstration. Il s'agit d'une spécialisation de l'énoncé dual de [Cis08, corollaire 1.31]. □

1.3. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen dérivable et E un ensemble ordonné fini. Un foncteur $F : E \longrightarrow \mathcal{A}$ est *cofibrant au bord de* x si la limite inductive $\partial F(x) := \varinjlim_{y<x} F(y)$ est représentable dans $\mathcal{A}$, et si le morphisme canonique

$$\partial F(x) = \varinjlim_{y<x} F(y) \longrightarrow \varinjlim_{y\leq x} F(y) \simeq F(x)$$

est une cofibration. On dit que F est *cofibrant sur les bords* s'il est cofibrant aux bords de tous les éléments de E. On note $\mathcal{A}^E_\partial$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}^E$ formée des foncteurs cofibrants sur les bords. Un morphisme $F \longrightarrow G$ de $\mathcal{A}^E_\partial$ est une *cofibration bordée* si pour tout élément x de E, le morphisme canonique $F(x) \amalg_{\partial F(x)} \partial G(x) \longrightarrow G(x)$ est une cofibration. Enfin, un morphisme $F \longrightarrow G$ de $\mathcal{A}^E_\partial$ est une équivalence faible si pour tout élément x de E, le morphisme $F(x) \longrightarrow G(x)$ est une équivalence faible de $\mathcal{A}$.

Lemme 1.4. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen dérivable, et E un ensemble ordonné fini.*

(a) Tout morphisme $F \longrightarrow F'$ de $\mathcal{A}^E$ dont la source est cofibrante sur les bords admet une factorisation en une cofibration bordée $F \longrightarrow F''$ suivie d'une équivalence faible $F'' \longrightarrow F$. En particulier, pour tout foncteur F de E dans $\mathcal{A}$, il existe une équivalence faible $F' \longrightarrow F$ dans $\mathcal{A}^E$ dont la source est un foncteur cofibrant sur les bords.

(b) Pour tout foncteur cofibrant sur les bords F de E vers $\mathcal{A}$, et tous $x \leq y$ dans E, le morphisme $F(x) \longrightarrow F(y)$ est une cofibration.

(c) *Pour tout foncteur cofibrant sur les bords F de E vers $\mathcal{A}$, $\varinjlim F$ est représentable dans $\mathcal{A}$.*
(d) *Pour tout foncteur cofibrant sur les bords F de E vers $\mathcal{A}$, et tout élément x de E, le morphisme canonique $F(x) \longrightarrow \varinjlim F$ est une cofibration.*
(e) *Si $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est un foncteur exact à droite vers une catégorie de Waldhausen, et si F est un foncteur de E vers $\mathcal{A}$ cofibrant sur les bords, alors il en est de même de ΦF, et le morphisme canonique $\varinjlim \Phi F \longrightarrow \Phi \varinjlim F$ est un isomorphisme (en particulier, $\varinjlim \Phi F$ est représentable dans $\mathcal{A}'$).*

Démonstration. L'assertion (a) résulte de la version de duale de [Cis08, proposition 1.29], l'assertion (b) de la version duale de [Cis08, corollaire 1.19], l'assertion (c) de la version duale de [Cis08, proposition 1.18], l'assertion (d) de la version duale de [Cis08, corollaire 1.20], et enfin l'assertion (e) de la version duale de [Cis08, lemme 3.1]. □

Proposition 1.5. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable, pour tout ensemble ordonné fini E, $\mathcal{A}^E_\partial$ est une catégorie de Waldhausen dérivable avec les définitions de 1.3. En outre, le foncteur d'inclusion $\mathcal{A}^E_\partial \longrightarrow \mathcal{A}^E$ est exact à droite, et induit une équivalence de catégories canonique $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E_\partial \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E$.*

Démonstration. Il s'agit cette fois d'une spécialisation des versions duales de [Cis08, théorème 1.30 et corollaire 1.32]. □

1.6. Un ensemble simplicial X sera dit *asphérique* si le morphisme de X vers l'ensemble simplicial final est une équivalence d'homotopie faible (*i.e.* si la réalisation géométrique de X est contractile). Nous rappelons le résultat d'algèbre homotopique classique suivant.

Lemme d'asphéricité. *Soit X un ensemble simplicial. Si pour tout ensemble ordonné fini E, tout morphisme d'ensembles simpliciaux du nerf de E vers X est simplicialement homotope à un morphisme constant, alors X est asphérique.*

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [Kan59] pour la définition des endofoncteurs de la catégorie des ensembles simpliciaux Sd, Ex et Ex^∞. On sait que si X est un ensemble simplicial, $\mathrm{Ex}^\infty X$ est un complexe de Kan ayant le même type d'homotopie que X. Par conséquent, pour tout ensemble simplicial Y, les morphismes de Y vers X dans la catégorie homotopique des ensembles simplicaux sont les classes d'homotopie de morphismes d'ensembles simpliciaux de Y vers $\mathrm{Ex}^\infty X$. La remarque clé est la suivante : pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$, la k-ème subdivision barycentrique du bord de Δ_n, $\mathrm{Sd}^k \partial\Delta_n$, est le nerf d'un ensemble ordonné fini (voir, par exemple, [Cis06, Lemme 2.1.37]) ayant le type d'homotopie de la sphère de dimension $n-1$. Or tout morphisme $\sigma\ : \partial\Delta_n \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$ peut être représenté par un morphisme de $\partial\Delta_n$ vers $\mathrm{Ex}^k X$ (où est k arbitrairement grand) et donc, par adjonction, par un morphisme de $\mathrm{Sd}^k \partial\Delta_n$ vers X. L'hypothèse implique que ce dernier se factorise à homotopie près par un 0-simplexe de X, et on en déduit qu'il en est de même de σ. Autrement dit, tous les groupes d'homotopie pointés $\pi_i(\mathrm{Ex}^\infty X, x)$, $x \in X_0 = \mathrm{Ex}^\infty X_0$, sont triviaux. Comme il est évident que l'hypothèse implique que X est non vide, cela prouve bien que $\mathrm{Ex}^\infty X$ est contractile, et donc l'équivalence d'homotopie faible canonique $X \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$ permet d'en déduire de que X est asphérique. □

1.7. On dira qu'un foncteur entre petites catégories est une *équivalence d'homotopie faible* si son nerf est une équivalence d'homotopie faible d'ensembles simplicaux (*i.e.* si la réalisation géométrique de son nerf est une équivalence d'homotopie). De même, une petite catégorie sera dite *asphérique* si son nerf est un ensemble simplicial asphérique.

Soit I une petite catégorie. Pour chaque objet i de I, on note I/i la catégorie des objets de I au-dessus de i. On a un foncteur d'oubli canonique de I/i vers I.

Si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, pour chaque objet j de J, on note I/j le produit fibré de I et de J/j au dessus de J. On a donc par construction un carré cartésien de catégories

$$\begin{tikzcd} I/j \arrow[r] \arrow[d, "u/j"'] & I \arrow[d, "u"] \\ J/j \arrow[r] & J \end{tikzcd} .$$

On dira que u est *asphérique* si pour tout objet j de J, la catégorie I/j est asphérique.

Théorème A de Quillen. *Tout foncteur asphérique est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. Voir [Qui73, théorème A]. □

1.8. Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen. On dit que Φ vérifie la *propriété d'approximation forte* s'il vérifie les axiomes suivants.

- AF1 Toute flèche de $\mathcal{A}$ dont l'image par Φ est une équivalence faible est une équivalence faible.
- AF2 Si $p : \Phi X \longrightarrow Y$ est une flèche de $\mathcal{A}'$, il existe un morphisme $u : X \longrightarrow X'$ et une équivalence faible $p' : \Phi X' \longrightarrow Y$ tels que le triangle suivant commute dans $\mathcal{A}'$.

$$\begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Phi u"'] & Y \\ \Phi X' \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

Cette propriété est appelée par Waldhausen [Wal85] la propriété d'approximation. Nous préférons réserver cette dénomination pour une propriété légèrement plus générale que nous introduirons plus tard (cf. 2.1).

Exemple 1.9. Pour toute catégorie de Waldhausen dérivable $\mathcal{A}$ et tout ensemble ordonné fini E, l'inclusion de $\mathcal{A}^E_\partial$ dans $\mathcal{A}^E$ est un foncteur exact à droite vérifiant la propriété d'approximation forte (cela résulte aussitôt de l'assertion (a) du lemme 1.4).

Les énoncés (a), (c) et (e) du lemme 1.4 permettent une preuve relativement simple du théorème d'approximation de Waldhausen [Wal85] (ou plutôt d'une légère généralisation, car nous ne demandons que l'existence d'un cylindre non nécessairement fonctoriel).

Proposition 1.10. *Soit Φ un foncteur exact à droite d'une catégorie de Waldhausen dérivable $\mathcal{A}$ vers une catégorie de Waldhausen satisfaisant l'axiome de saturation $\mathcal{A}'$. Si le foncteur Φ vérifie la propriété d'approximation forte, alors le foncteur induit $\mathrm{w}\Phi\ : \mathrm{w}\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{w}\mathcal{A}'$ est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. En vertu du théorème A de Quillen, il suffit de montrer que le foncteur $\mathrm{w}\Phi$ est asphérique. Soit Y un objet de $\mathrm{w}\mathcal{A}'$. On va vérifier que la catégorie $\mathrm{w}\mathcal{A}/Y$ est asphérique en lui appliquant le lemme d'asphéricité. La catégorie $\mathrm{w}\mathcal{A}/Y$ admet la description explicite suivante. Un objet est un couple (X, u), où X est un objet de $\mathcal{A}$, et $u : \Phi X \longrightarrow Y$ une équivalence faible. Un morphisme de (X, u) vers (X', u') est une équivalence faible $\alpha\ : X \longrightarrow X'$ telle que $u'\Phi\alpha = u$ (la composition étant induite par celle de $\mathcal{A}$). Si E est un ensemble ordonné fini, un foncteur de E vers $\mathrm{w}\mathcal{A}/Y$ est donc déterminé par les données suivantes.

(1) Un foncteur $F : E \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que pour tous $x \leq y$, $F(x) \longrightarrow F(y)$ soit une équivalence faible.
(2) Une équivalence faible $f : \Phi F \longrightarrow Y$ dans ${\mathcal{A}'}^E$ (où Y désigne par abus le foncteur constant de valeur Y).

En vertu de 1.4 (a), il existe une équivalence faible $p : F' \longrightarrow F$ dans $\mathcal{A}^E$ dont la source est un foncteur cofibrant sur les bords. On obtient une équivalence faible $f' : \Phi F' \longrightarrow Y$ en posant $f' = f\Phi p$. La donnée (F', f') définit donc un foncteur $E \longrightarrow \mathrm{w}\mathcal{A}/Y$, et p une homotopie de (F, f) vers (F', f'). Quitte à remplacer (F, f) par (F', f'), on peut par suite supposer que F est cofibrant sur les bords. Or il résulte des assertions (c) et (e) du lemme 1.4 que $\varinjlim F$ et $\varinjlim \Phi F$ sont représentables dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ respectivement, et que $\varinjlim \Phi F$ est canoniquement isomorphe à $\Phi \varinjlim F$. Le morphisme f' peut donc s'écrire comme le composé de l'image par Φ du morphisme canonique $\eta\ : F \longrightarrow \varinjlim F$ et d'une flèche $g : \Phi \varinjlim F \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{A}'$. L'axiome AF2 nous permet de choisir un morphisme $h : \varinjlim F \longrightarrow X$ dans $\mathcal{A}$, et une équivalence faible $u\ : \Phi X \longrightarrow Y$ tels que $u\Phi h = g$. Comme $\mathcal{A}'$ vérifie l'axiome de saturation, les flèches $g\Phi\eta = f'$ et β étant des équivalence faibles, $\Phi(h\eta)$ en est une. L'axiome AF1 implique donc que $h\eta$ est une équivalence faible. Par conséquent, la donnée (X, u) définit un foncteur de E vers $\mathrm{w}\mathcal{A}/Y$, et on remarque aussitôt que le morphisme de foncteurs $h\eta\ : F \longrightarrow X$ définit quant à lui une homotopie de (F, f) vers le foncteur constant (X, u), ce qui achève la démonstration. □

2. Théorème d'approximation et équivalences dérivées

2.1. Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories d'objets cofibrants au sens de K. S. Brown [Bro73]. On dit que Φ a la *propriété d'approximation* si les axiomes suivants sont vérifiés.

AP1 Toute flèche de $\mathcal{A}$ dont l'image par Φ est une équivalence faible est une équivalence faible.
AP2 Si $p : \Phi X \longrightarrow Y$ est une flèche de $\mathcal{A}'$, il existe une équivalence faible $v : Y \longrightarrow Y'$, un morphisme $u : X \longrightarrow X'$ et une équivalence faible $p' : \Phi X' \longrightarrow Y'$ tels que le carré suivant commute dans $\mathcal{A}'$.

$$\begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Phi u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ \Phi X' \arrow[r, "p'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Il est immédiat que tout foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen ayant la propriété d'approximation forte (cf. 1.8) a la propriété d'approximation au sens défini ci-dessus.

Lemme 2.2. *Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories d'objets cofibrants. Si Φ vérifie la propriété d'approximation, on peut raffiner l'axiome AP2 comme suit. Pour tout morphisme $p : \Phi X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{A}'$, il existe une cofibration triviale $v : Y \longrightarrow Y'$, une cofibration $u : X' \longrightarrow X$ et une équivalence faible $p' : \Phi X' \longrightarrow Y'$ tels que le carré suivant commute dans $\mathcal{A}'$.*

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Phi u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
\Phi X' \arrow[r, "p'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soient $p : \Phi X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathcal{A}'$, $v' : Y \longrightarrow Y''$ une équivalence faible, $u' : X \longrightarrow X''$ une flèche de $\mathcal{A}$, et $p'' : \Phi X'' \longrightarrow Y''$ une équivalence faible telles que $p''\Phi u' = v'p$. On peut alors factoriser u' en une cofibration $u : X \longrightarrow X'$ suivie d'une équivalence faible $u'' : X' \longrightarrow X''$, puis former le carré cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Phi u"'] & Y \arrow[d, "v_0"] \\
\Phi X' \arrow[r, "p_0"'] & Y_0
\end{tikzcd}$$

On peut ensuite factoriser le morphisme $s : Y_0 \longrightarrow Y''$ (induit par u'' et par v') en une cofibration $t : Y_0 \longrightarrow Y'$ suivie d'une équivalence faible $w : Y' \longrightarrow Y''$. On pose $v = tv_0$, et $p' = tp_0$. Comme t et v_0 sont des cofibrations, il en est de même de v. D'autre part, vu que $wv = wtv_0 = sv_0 = v'$, on voit immédiatement que v est une équivalence faible. De même, en regard des égalités $wp' = wtp_0 = sp_0 = p''\Phi u''$, on voit que p' est une équivalence faible, ce qui fournit le diagramme voulu. □

Proposition 2.3. *Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables. Si Φ a la propriété d'approximation, alors le foncteur induit $\mathrm{w}\Phi : \mathrm{w}\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{w}\mathcal{A}'$ est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. On définit une catégorie $\mathcal{A}''$ comme suit. Les objets sont les quintuplets

$$(X, x, Z, y, Y) \ ,$$

X étant un objet de $\mathcal{A}$, Y et Z des objets de $\mathcal{A}'$, x une équivalence faible de ΦX vers Z, et y une cofibration triviale de Y vers Z. Les flèches

$$(X, x, Z, y, Y) \longrightarrow (X', x', Z', y', Y')$$

sont les triplets (u, w, v), où u est une flèche de X vers X', w une flèche de Z vers Z', et v une flèche de Y vers Y', telles que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\Phi u"'] & Z \arrow[d, "w"] & Y \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "v"] \\
\Phi X' \arrow[r, "x'"'] & Z' & Y' \arrow[l, "y'"]
\end{tikzcd}$$

Une telle flèche (u, w, v) est une équivalence faible (resp. une cofibration) si u, v et w sont des équivalences faibles (resp. si u, v et $Y' \amalg_Y Z \longrightarrow Z'$ sont des cofibrations). On vérifie alors qu'avec ces définitions, la catégorie $\mathcal{A}''$ est une catégorie de Waldhausen dérivable. Nous allons prouver l'existence des factorisations en une cofibration suivie d'une équivalence faible, laissant les autres axiomes en exercice pour le lecteur. Considérons une flèche (u, w, v) comme ci-dessus. On commence par factoriser u en une cofibration $u' : X \longrightarrow X''$ suivie d'une équivalence faible $u'' : X'' \longrightarrow X'$. La flèche $\Phi u'$ est alors une cofibration, ce qui permet de former le carré cocartésien suivant dans $\mathcal{A}'$.

$$\begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\Phi u'"'] & Z \arrow[d, "w_0"] \\ \Phi X'' \arrow[r, "x''_0"'] & Z''_0 \end{tikzcd}$$

On factorise ensuite v en une cofibration $v' : Y \longrightarrow Y''$ suivie d'une équivalence faible $v'' : Y'' \longrightarrow Y'$. On forme cette fois le carré codartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "w_1"'] & Y \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "v'"] \\ Z''_1 & Y'' \arrow[l, "y''_1"] \end{tikzcd}$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "w_0"'] \arrow[dr, "w"] & Z''_1 \arrow[d] \\ Z''_0 \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} \qquad ,$$

et en posant $Z''' = Z''_0 \amalg_Z Z''_1$ on obtient donc une cofibration $s : Z \longrightarrow Z'''$, et une flèche $t : Z''' \longrightarrow Z'$ telles que $ts = w$. Si on choisit une factorisation de t en une cofibration $t' : Z''' \longrightarrow Z''$ suivie d'une équivalence faible $w'' \ : Z'' \longrightarrow Z$, en posant $w' = t's$, on obtient une factorisation de w en une cofibration w' suivie d'une équivalence faible w''. On vérifie facilement que ces constructions donnent une factorisation de (u, w, v) en une cofibration (u', w', v') suivie d'une équivalence faible (u'', w'', v'').

On définit deux foncteurs exacts à droite

$$\Phi' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'' \quad \text{et} \quad \Phi'' : \mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{A}'$$

par $\Phi' X = (X, 1_{\Phi X}, \Phi X, 1_{\Phi X}, \Phi X)$ et $\Phi''(X, x, Z, y, Y) = Y$. On vérifie aussitôt que $\Phi''\Phi' = \Phi$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de prouver que $\mathrm{w}\Phi'$ et $\mathrm{w}\Phi''$ sont des équivalences d'homotopie faible.

On va montrer que $\mathrm{w}\Phi'$ est une équivalence d'homotopie. Pour cela ont définit un foncteur $\Psi \ : \mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{A}$ par $\Psi(X, x, Z, y, Y) = X$. Il est clair que Ψ est exact à droite et que $\Psi\Phi' = 1_{\mathcal{A}}$, ce qui implique par fonctorialité que $\mathrm{w}\Psi\mathrm{w}\Phi' = 1_{\mathrm{w}\mathcal{A}}$. D'autre part, on a un foncteur exact à droite $\Xi \ : \mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{A}''$ défini par

$$\Xi(X, x, Z, y, Y) = (X, x, Z, 1_Z, Z) \ .$$

On vérifie en outre facilement qu'on a des équivalences faibles naturelles

$$1_{\mathcal{A}''} \longrightarrow \Xi \longleftarrow \Phi'\Psi$$

correspondant aux diagrammes commutatifs de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, equal] & Y \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "y"] \\
\Phi X \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, equal] & Z \\
\Phi X \arrow[r, equal] & \Phi X \arrow[u, "x"'] \arrow[r, equal] & \Phi X \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Cela implique que $\mathrm{w}\Phi'\mathrm{w}\Psi = \mathrm{w}(\Phi'\Psi)$ et $1_{\mathrm{w}\mathcal{A}''}$ sont homotopes.

Il reste donc à prouver que $\mathrm{w}\Phi''$ est une équivalence d'homotopie faible. Pour cela, on va prouver qu'il vérifie la propriété d'approximation forte, ce qui permettra de conclure en vertu de la proposition 1.10. Il est immédiat que le fait que Φ vérifie l'axiome AP1 implique que Φ'' vérifie l'axiome AF1. Il reste donc à démontrer que Φ'' vérifie l'axiome AF2. Soit $\xi = (X, x, Z, y, Y)$ un objet de $\mathcal{A}''$, et $v : \Phi''\xi \longrightarrow Y'$ un morphisme de $\mathcal{A}'$. On va construire un objet ξ' de $\mathcal{A}''$, et une flèche $f : \xi \longrightarrow \xi'$ tels que $\Phi''\xi' = Y'$ et $\Phi''f = v$. Le morphisme v n'est autre qu'un morphisme $v : Y \longrightarrow Y'$ dans $\mathcal{A}'$. On peut donc former le carré cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "v"] \\
Z_0 & Y' \arrow[l, "b"]
\end{tikzcd}$$

Comme y est une cofibration triviale, il en est de même de b. On peut appliquer l'axiome AP2 (ou plutôt son raffinement donné par le lemme 2.2) à la flèche composée ax

$$ax \ : \Phi X \longrightarrow Z \longrightarrow Z_0 \ .$$

Il existe donc une cofibration $u : X \longrightarrow X'$, une équivalence faible $x' : \Phi X' \longrightarrow Z'$, et une cofibration triviale $c : Z_0 \longrightarrow Z'$, telles que le carré suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "ax"] \arrow[d, "u"'] & Z_0 \arrow[d, "c"] \\
\Phi X' \arrow[r, "x'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

En conclusion, on a donc obtenu le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[rr, "x"] \arrow[d, "\Phi u"'] & & Z \arrow[dr, "a"] & & Y \arrow[ll, "y"'] \arrow[d, "v"] \\
\Phi X' \arrow[rr, "x'"'] & & Z' & Z_0 \arrow[l, "c"] & Y' \arrow[l, "b"]
\end{tikzcd}$$

En posant $y' = cb$, $w = ca$, et $\xi' = (X', x', Z', y', Y')$, le triplet $f = (u, w, v)$ définit bien une flèche de ξ vers ξ' dans $\mathcal{A}''$ telle que $\Phi''f = v$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

2.4. Une catégorie de Waldhausen $\mathcal{A}$ est *fortement saturée* si toute flèche de $\mathcal{A}$ dont l'image dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}$ est un isomorphisme est une équivalence faible (cela implique en particulier que $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome de saturation).

Exemple 2.5. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles fermée au sens de Quillen admettant un objet nul. On désigne par $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des objets cofibrants. Cette catégorie est canoniquement munie d'une structure de catégorie de Waldhausen dérivable, et on vérifie qu'elle est fortement saturée. Plus généralement, toute sous-catégorie de Waldhausen dérivable de $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ (cf. 1.1) est fortement saturée (et il est remarquable que les catégories de Waldhausen dérivables que l'on trouve dans la nature sont généralement de ce type).

Proposition 2.6. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen fortement saturée, alors pour tout ensemble ordonné fini E, il en est de même des catégories $\mathcal{A}^E_\partial$ et $\mathcal{A}^E$.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la version duale de [Cis08, proposition 2.20]. □

2.7. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen dérivable. On peut lui associer une catégorie de Waldhausen dérivable fortement saturée $\overline{\mathcal{A}}$ comme suit. La catégorie $\overline{\mathcal{A}}$ est simplement la catégorie $\mathcal{A}$ elle même, et ses cofibrations sont celles de $\mathcal{A}$. Les équivalences faibles de $\overline{\mathcal{A}}$ sont les morphismes de $\mathcal{A}$ qui sont envoyés dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}$ sur des isomorphismes (le fait que l'on obtienne de la sorte une catégorie de Waldhausen dérivable fortement saturée résulte de la version duale de [Cis08, proposition 3.16]). Il est immédiat que l'identité de $\mathcal{A}$ définit un foncteur exact à droite de $\mathcal{A}$ vers $\overline{\mathcal{A}}$ induisant un isomorphisme canonique de catégories $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} = \mathsf{Ho}\,\overline{\mathcal{A}}$. En outre, si $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables, il reste exact à droite pour les structures fortement saturées correspondantes, induisant de la sorte un foncteur exact à droite $\overline{\Phi}$ de $\overline{\mathcal{A}}$ vers $\overline{\mathcal{A}'}$ tel que le diagramme suivant commute (voir la version duale de [Cis08, proposition 3.17]).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathcal{A}' \arrow[d] \\ \overline{\mathcal{A}} \arrow[r, "\overline{\Phi}"] & \overline{\mathcal{A}'} \end{tikzcd}$$

Proposition 2.8. *Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables ayant la propriété d'approximation. Alors pour tout ensemble ordonné fini E, le foncteur induit par Φ*

$$\mathcal{A}^E_\partial \longrightarrow \mathcal{A}'^E_\partial$$

a la propriété d'approximation. En outre, Φ induit alors pour tout ensemble ordonné fini E des équivalences de catégories

$$\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E_\partial \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'^E_\partial \quad \textit{et} \quad \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'^E\ .$$

Démonstration. Cela résulte des versions duales de [Cis08, corollaire 1.32 et théorème 3.12]. □

Théorème 2.9. *Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables et fortement saturées. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout ensemble ordonné fini E, le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'^E$ *est une équivalence de catégories.*
(ii) Le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$ *est une équivalence de catégories.*
(iii) Le foncteur Φ a la propriété d'approximation.

Démonstration. C'est une spécialisation de la version duale de [Cis08, théorème 3.19]. □

Scholie 2.10. Le résultat précédent étant essentiel dans la suite du texte, nous proposons au lecteur un aperçu de l'argument permettant de prouver l'implication (ii)⇒(iii) du théorème 2.9 (une preuve détaillée est donnée dans [Cis08]).

On suppose donc que le foncteur $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$ est une équivalence de catégories, et on veut en déduire la propriété d'approximation. La forte saturation de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ impliquent immédiatement l'axiome AP1. Considérons un morphisme $p : \Phi X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{A}$. Alors il existe un objet X_0 de $\mathcal{A}$, et un isomorphisme $i : \Phi X_0 \longrightarrow Y$ dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$. Le morphisme $i^{-1}p$ provient alors d'un morphisme $w : X \longrightarrow X_0$ de $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}$. Comme $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}$ est obtenu à partir de $\mathcal{A}$ par un calcul de fractions à gauche à homotopie près (cf. [Cis08, 1.6]), Le morphisme w peut-être représenté par un diagramme de la forme

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xleftarrow{v_1} X_0\,,$$

avec v_1 une cofibration triviale, et p_1 une cofibration. L'isomorphisme $i : \Phi X_0 \simeq Y$ admet quant à lui une présentation de la forme

$$\Phi X_0 \xrightarrow{p_0} Y_0 \xleftarrow{v_0} Y\,,$$

avec v_0 une cofibration triviale, et p_0 une cofibration (la forte saturation de $\mathcal{A}'$ impliquant donc que p_0 est une cofibration triviale). En formant la somme amalgamée $Y_1 = \Phi X_1 \amalg_{\Phi X_0} Y_0$ on obtient un diagramme commutatif de la forme suivante dans $\mathcal{A}'$.

$$\begin{tikzcd} & \Phi X_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\Phi v_1"'] & Y_0 \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[l, "v_0"'] \\ \Phi X \arrow[r, "\Phi p_1"'] & \Phi X_1 \arrow[r, "q_0"'] & Y_1 & \end{tikzcd}$$

On obtient de la sorte un diagramme (non nécessairement commutatif) de $\mathcal{A}'$ de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Phi u_0"'] & Y \arrow[d, "v_0"] \\ \Phi X_0 \arrow[r, "q_0"'] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Les morphismes q_0 et v_0 sont des cofibrations triviales. Ce dernier carré commute dans $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$, ce qui implique qu'il commute à homotopie près dans $\mathcal{A}'$; autrement dit, on a vérifié une version faible de l'axiome AP2. On démontre alors que cette version faible implique l'axiome AP2 proprement dit ; cf. [Cis08, lemme 3.18].

Corollaire 2.11. *Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) Pour tout ensemble ordonné fini E, le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}^E \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'^E$ *est une équivalence de catégories.*

(ii) Pour tout ensemble ordonné fini E, le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}_\partial^E \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'^E_\partial$ est une équivalence de catégories.
(iii) Le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. Cela résulte aussitôt du théorème précédent, de la proposition 2.8, et des considérations faites au paragraphe numéro 2.7. □

2.12. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen dérivable. Suivant [Wal85], pour tout $n \geq 0$, on pose $\mathsf{F}_n\mathcal{A} = \mathcal{A}_\partial^{\Delta_n}$ (Δ_n désignant l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ muni de l'ordre naturel). La catégorie $\mathsf{F}_n\mathcal{A}$ est donc la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}^{\Delta_n}$ dont les objets sont les suites de cofibrations

$$X = (X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n)\ .$$

Une flèche $X \longrightarrow Y$ est une équivalence faible (resp. une cofibration si pour tout i (resp. tous $i < j$), le morphisme $X_i \longrightarrow Y_i$ (resp. $Y_i \amalg_{X_i} X_j \longrightarrow Y_j$) est une équivalence faible (resp. une cofibration) de $\mathcal{A}$. Il résulte de la proposition 1.5 qu'avec ces définitions, la catégorie $\mathsf{F}_n\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable. On rappelle que pour $n \geq 0$, si $\mathsf{Fl}\,\Delta_n$ désigne l'ensemble ordonné des applications croissantes de Δ_1 vers Δ_n (*i.e.* des couples (i,j) tels que $0 \leq i \leq j \leq n$), $\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{A}^{\mathsf{Fl}\,\Delta_n}$ formée des objets X vérifiant les deux conditions (a) et (b) ci-dessous.
(a) Pour tout i, X_{ii} est un objet nul de $\mathcal{A}$.
(b) Pour tous $i \leq j \leq k$, la flèche de X_{ij} vers X_{ik} est une cofibration, et le carré ci-dessous est cocartésien dans $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} X_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_{ik} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X_{jk} \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathsf{S}_0\mathcal{A}$ est donc équivalente à la catégorie ponctuelle, et on sait d'autre part que pour $n \geq 1$, le foncteur d'oubli des choix $\mathsf{S}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{F}_{n-1}\mathcal{A}$ est une équivalence de catégories (voir [Wal85, 1.3]). On définit alors une structure de catégorie de Waldhausen sur $\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ par transfert à partir de $\mathsf{F}_{n-1}\mathcal{A}$ via cette équivalence. On obtient de la sorte une catégorie de Waldhausen dérivable simpliciale $\mathsf{S}\mathcal{A}$, ce qui définit une catégorie simpliciale $\mathrm{w}\mathsf{S}\mathcal{A}$. La diagonale de l'ensemble bisimplicial correspondant sera notée aussi par abus $\mathrm{w}\mathsf{S}\mathcal{A}$ (comme de coutume). C'est un ensemble simplicial pointé (par un objet nul implicitement choisi). L'*espace de K-théorie de* $\mathcal{A}$ est enfin défini comme l'espace des lacets $K(\mathcal{A}) = \Omega(\mathrm{Ex}^\infty\,\mathrm{w}\mathsf{S}\mathcal{A})$.

Lemme 2.13. *Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables vérifiant la propriété d'approximation. Alors pour tout $n \geq 0$, le foncteur $\mathsf{S}_n\Phi\ : \mathsf{S}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{S}_n\mathcal{A}'$ la vérifie aussi.*

Démonstration. L'assertion est triviale pour $n = 0$, et pour $n \geq 1$, en regard des équivalences canoniques $\mathsf{S}_n\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_\partial^{\Delta_{n-1}}$ et $\mathsf{S}_n\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}'^{\Delta_{n-1}}_\partial$, cela résulte de la proposition 2.8. □

Proposition 2.14. *Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables ayant la propriété d'approximation. Alors le morphisme induit $K(\Phi) : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{A}')$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Il résulte aussitôt de la proposition 2.3 et du lemme 2.13 que les foncteurs $\mathrm{w}\mathsf{S}_n\Phi$ sont des équivalences d'homotopie faible, ce qui implique immédiatement l'assertion. □

Théorème 2.15. *Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables induisant une équivalence de catégories $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$ entre les catégories homotopiques correspondantes. Alors Φ induit une équivalence d'homotopie $K(\overline{\mathcal{A}}) \simeq K(\overline{\mathcal{A}'})$ entre les K-théories de $\overline{\mathcal{A}}$ et de $\overline{\mathcal{A}'}$ (les catégories de Waldhausen dérivables et fortement saturées associées à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ respectivement). En particulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont fortement saturées, alors Φ induit une équivalence d'homotopie*

$$K(\Phi) : K(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{A}')\ .$$

Démonstration. Vu les isomorphismes canoniques $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} = \mathsf{Ho}\,\overline{\mathcal{A}}$ et $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A}' = \mathsf{Ho}\,\overline{\mathcal{A}'}$, il suffit clairement de prouver l'assertion lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont fortement saturées. Cela résulte alors de la proposition 2.14 et du théorème 2.9. □

2.16. L'énoncé ci-dessus sera étendu au cas des foncteurs homotopiquement exacts à droite ; cf. corollaire 4.14.

3. Localisation simpliciale des catégories d'objets fibrants

3.1. On considèrera, dans un premier temps, une catégorie d'objets fibrants au sens de K. S. Brown [Bro73], notée $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{w}\mathcal{C}$ la sous-catégorie des équivalences faibles de $\mathcal{C}$. Le but de cette section est de comprendre un modèle explicite de la localisation simpliciale de $\mathcal{C}$ que l'on va comparer avec la localisation simpliciale de $\mathcal{C}$ décrite en termes de plongement de Yoneda dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux.

Soit $P(\mathcal{C})$ la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{C}$. On considère cette catégorie comme une catégorie de modèles fermée pour la structure projective : les équivalences faibles (resp. les fibrations) de $P(\mathcal{C})$ sont les équivalences d'homotopie faibles (resp. les fibrations de Kan) argument par argument ; voir par exemple [Cis06, corollaire 1.4.24]. On désigne par

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow P(\mathcal{C})$$

le plongement de Yoneda.

On définit ensuite $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ comme la localisation de Bousfield à gauche de $P(\mathcal{C})$ par l'image de $\mathrm{w}\mathcal{C}$ par h (voir [Hir03]). Les objets locaux de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ sont donc les préfaisceaux simpliciaux F sur $\mathcal{C}$, tels que, pour toute équivalence faible de $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, le morphisme $F(Y) \longrightarrow F(X)$ soit une équivalence d'homotopie faible.

Théorème 3.2. *La catégorie de modèles $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est propre. En outre, les équivalences faibles sont stables par produits finis dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Notons $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ la localisation de Bousfield à gauche de la structure de catégorie de modèles injective (i.e. dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les équivalences d'homotopie faibles argument par argument ; voir [Cis06, corollaire 1.4.22]) par les équivalences faibles de $\mathcal{C}$. Les équivalences faibles de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ sont les mêmes que celles de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$, et par conséquent, $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est propre si et seulement si $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est propre ; cf. [Cis06, corollaire 1.5.21]. Il est clair que $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est propre à gauche, puisque tous ses objets sont cofibrants. Il reste donc à démontrer la propreté à droite. Il résulte facilement de [Bro73, I.1

Fatorization Lemma] que $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est la localisation de Bousfield à gauche de $P(\mathcal{C})$ par les fibrations triviales de $\mathcal{C}$. Vu que la structure de catégorie de modèles fermée injective sur $P(\mathcal{C})$ est propre, en vertu de [Cis06, théorème 1.5.4], il suffit de prouver que pour tout carré cartésien de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ de la forme

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p''"] & F' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & F \arrow[d, "p"] \\ h(X) \arrow[r, "h(u)"] & h(Y) \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

si p est une fibration de but fibrant dans $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$, et si u est une fibration triviale de $\mathcal{C}$, alors le morphisme v est une équivalence faible de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. Or dans ce cas, pour tout objet Y' de $\mathcal{C}$, et tout entier $n \geq 0$, si on se donne un morphisme $s : \Delta_n \times h(Y') \longrightarrow F'$, on obtient des carrés cartésiens de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd} \Delta_n \times h(X') \arrow[r, "w"] \arrow[d] & \Delta_n \times h(Y') \arrow[d] \\ F'' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p''"] & F' \arrow[d, "p'"] \\ h(X) \arrow[r, "h(u)"] & h(Y) \end{tikzcd}$$

Comme les équivalences faibles de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ forment un $\mathcal{C} \times \Delta$-localisateur régulier au sens de [Cis06, 3.4.13] (cf. [Cis06, proposition 3.4.34]), en vertu de [Cis06, corollaire 3.4.47], on est à présent ramené à démontrer que le morphisme w est une équivalence faible de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. Or le morphisme $p's$ se factorise par la projection de $\Delta_n \times h(Y')$ sur $h(Y')$, ce qui implique que le morphisme w est le produit de l'identité de Δ_n et de l'image par h du morphisme $X' \longrightarrow Y'$ obtenu d'un carré cartésien de la forme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$. Cela achève la démonstration de la propreté, puisque les fibrations triviales sont stables par image inverse dans $\mathcal{C}$.

En vertu de [Cis06, corollaires 1.4.19 et 3.4.34], pour démontrer la stabilité des équivalences faibles par produits finis, il suffit de prouver que si $X \longrightarrow Y$ est une fibration triviale de $\mathcal{C}$, et si Z est un objet de $\mathcal{C}$, et $n \geq 0$ un entier, alors le morphisme induit

$$\Delta_n \times h(Z) \times h(X) \longrightarrow \Delta_n \times h(Z) \times h(Y)$$

est une équivalence faible de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. On peut immédiatement supposer que $n = 0$, et la propriété voulue résulte aussitôt de la stabilité des fibrations triviales par produits finis dans $\mathcal{C}$. □

3.3. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. On note $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ la catégorie définie comme suit. Les objets sont les couples (s, p), où $s : Z \longrightarrow X$ est une fibration triviale de $\mathcal{C}$, et où $p : Z \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$. Une flèche α de (s,p) vers (s',p') est un diagramme commutatif de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & \\ X & Z' \arrow[l, "s'"] \arrow[r, "p'"'] & Y \end{tikzcd}$$

La composition est induite par la composition dans $\mathcal{C}$. Cette construction est fonctorielle en X et Y de la manière suivante.

Si $\varphi : X \longrightarrow X'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on définit un foncteur

$$\varphi^* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X',Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\ , \quad (s',p') \longmapsto (s,p)\, ,$$

où le couple (s,p) est déterminé par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, equal] \\ X' & Z' \arrow[l, "s'"] \arrow[r, "p'"'] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel le carré de gauche est cartésien. Si φ est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, alors le (nerf du) foncteur φ^* est une équivalence d'homotopie faible. Pour le voir, on remarque que, d'après [Bro73, I.1 Fatorization Lemma], il suffit de démonter cette propriété lorsque φ est une fibration triviale : or dans ce cas, le foncteur φ^* admet un adjoint à gauche

$$\varphi_! : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X',Y)\ , \quad (s,p) \longmapsto (\varphi s,p)\, ,$$

ce qui fait du nerf de φ^* une équivalence d'homotopie.

Si $\psi : Y \longrightarrow Y'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on lui associe un foncteur

$$\psi_* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y')\ , \quad (s,p) \longmapsto (s,\psi p)\, .$$

Si ψ est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, le (nerf du) foncteur ψ_* est une équivalence d'homotopie faible. En effet, d'après *loc. cit.*, il suffit de traiter le cas où ψ est une fibration triviale, et dans ce cas, on vérifie que ψ_* admet un adjoint à droite

$$\psi^! : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y') \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\ , \quad (s',p') \longmapsto (s,p)\, ,$$

où le couple (s,p) est déterminé par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, equal] & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi'"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X & Z' \arrow[l, "s'"] \arrow[r, "p'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

dans lequel le carré de droite est cartésien.

On dispose enfin d'une loi de composition

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

qui associe à (s,p) dans $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et à (t,q) dans $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ le couple (u,r) obtenu du produit fibré de p et de t.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & V \times_Y W \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dlll, bend right, "u"'] \arrow[drrr, bend left, "r"] & & \\ & V \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "p"'] & & W \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "q"'] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Cela définit une bicatégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$.

Lemme 3.4. *Pour tout morphisme $Y \longrightarrow Y'$ et tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y')$ est une fibration de Grothendieck à fibres discrètes. En outre, le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,-)$ commute aux produits fibrés.*

Démonstration. Soit $H(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}/X$ dont les objets sont les fibrations triviales de but X. On dispose du foncteur

$$\alpha_X : H(X) \longrightarrow \mathcal{C}\ , \quad (Z, s : Z \longrightarrow X) \longmapsto Z\ .$$

Si Y est un objet de $\mathcal{C}$, le foncteur d'oubli $\mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}$ est une fibration de Grothendieck à fibres discrètes. Plus généralement, si $\psi : Y \longrightarrow Y'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, le foncteur $\mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/Y'$, induit par la composition avec ψ, est une fibration de Grothendieck à fibres discrètes, et on remarque qu'on a les carrés cartésiens de catégories ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y') \arrow[r] \arrow[d] & H(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\ \mathcal{C}/Y \arrow[r] & \mathcal{C}/Y' \arrow[r] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Or, d'après [Gro03, Exposé VI, corollaire 6.9], les fibrations de Grothendieck (à fibres discrètes) sont stables par changement de base, ce qui achève la démonstration de la première assertion. La deuxième résulte du fait évident que le foncteur

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}at\ , \quad Y \longmapsto \mathcal{C}/Y$$

commute aux produits fibrés. □

Lemme 3.5. *Soit $\psi : Y \longrightarrow Y'$ une fibration de $\mathcal{C}$, et X un objet de $\mathcal{C}$. Considérons un morphisme $\alpha : (s,p) \longrightarrow (s',p')$ dans $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y')$. Alors le foncteur induit*

$$\psi_*/\alpha : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)/(s,p) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y')/(s',p')$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Démonstration. Le couple (s,p) correspond à un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} X & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "p"] & Y'\ . \end{tikzcd}$$

On peut alors former le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} & Z \times_{Y'} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X & Z \arrow[l, "s"] \arrow[r, "p"'] & Y' \end{tikzcd}$$

On remarque ensuite que $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)/(s,p)$ s'identifie canoniquement à la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Z\times_{Y'} Y)$. De même, on s'aperçoit que $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)/(s',p')$ est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Z'\times_{Y'} Y)$ (où Z' désigne la source de s' et de p'). En outre, sous ces identifications, si $\beta : Z\times_{Y'} Y \longrightarrow Z'\times_{Y'} Y$ désigne le morphisme induit par α, le foncteur ψ_*/α correspond au foncteur

$$\beta_* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Z\times_{Y'} Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Z'\times_{Y'} Y)\,.$$

Or β est une équivalence faible, et donc β_* est une équivalence d'homotopie faible. □

Proposition 3.6. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}$, dans lequel φ est une fibration. Alors pour tout objet T de $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,X') \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\varphi'_*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,X) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,Y') \arrow[r, "\beta_*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,Y) \end{tikzcd} \tag{3.6.2}$$

est un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux.

Démonstration. En vertu de la deuxième assertion du lemme 3.4, le carré commutatif (3.6.2) est cartésien. Cette proposition résulte donc formellement de la première assertion du lemme 3.4, du lemme 3.5, et du théorème B de Quillen tel qu'il est énoncé dans [Cis06, théorème 6.4.15 (iv)]. □

Remarque 3.7. La proposition ci-dessus est démontrée dans le cadre des catégories de Waldhausen dérivables avec factorisations fonctorielles dans [Wei99].

3.8. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, notons $\underline{h}(X)$ le préfaisceaux d'ensembles simpliciaux

$$\underline{h}(X) : T \longmapsto \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,X)\,. \tag{3.8.1}$$

On a un morphisme canonique de préfaisceaux simpliciaux

$$h(X) \longrightarrow \underline{h}(X) \tag{3.8.2}$$

défini par les applications

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) &\longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(T,X) \\ u &\longmapsto (1_T, u)\,. \end{aligned}$$

3.9. On rappelle qu'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "i'"] \\ Y \arrow[r, "b"'] & Y' \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}$ est *homotopiquement cartésien* si X est la limite homotopique du diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "i'"] \\ Y \arrow[r, "b"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Comme pour les catégorie de modèles de Quillen, cela revient à demander qu'il existe une factorisation de a en une équivalence faible $X \longrightarrow X''$ suivie d'une fibration $X'' \longrightarrow X$ telle que le morphisme $X \longrightarrow Y \times_{Y'} X''$ soit un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$; cf. [Cis08, lemme 2.16].

Théorème 3.10. *Le plongement de Yoneda*

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$$

respecte les carrés homotopiquement cartésiens et les produits homotopiques finis.

Démonstration. On sait que $\underline{h}(X)$ est local dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$: ce préfaisceau envoie les équivalences faibles de $\mathcal{C}$ sur des équivalences d'homotopie faibles. La proposition 3.6 assure par conséquent que le foncteur $\underline{h}$ envoie les carrés cartésiens de la forme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec φ une fibration, sur des carrés homotopiquement cartésiens. Comme ce foncteur respecte les équivalences faibles, il s'en suit que le foncteur $\underline{h}$ respecte les carrés homotopiquement cartésiens. Soit $L^H(\mathcal{C})$ la localisation "hammock" de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles ; cf. [DK80a, 2.1]. Le préfaisceau simplicial $L^H(C)(-,X)$ admet un sous préfaisceau F_X, où, pour tout objet T de $\mathcal{C}$, les k-simplexes de $F_X(T)$ sont les k-simplexes de $L^H(\mathcal{C})(T,X)$ formés des hammocks réduits de largeur k et de longueur arbitraire dont les lignes sont les zig zag de la forme

$$T \;\text{———}\; C_{i,1} \;\text{———}\; C_{i,2} \;\text{———}\; \cdots \;\text{———}\; C_{i,n-1} \;\text{———}\; X$$

avec $0 \leq i \leq k$, les morphismes allant dans la mauvaise direction étant des fibrations triviales de $\mathcal{C}$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a un morphisme canonique (et fonctoriel en X) de préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{C}$

$$v : F_X \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(-,X)$$

défini en envoyant un zig zag

$$T \overset{u_1}{\text{———}} C_{i,1} \overset{u_2}{\text{———}} C_{i,2} \;\text{———}\; \cdots \overset{u_{n-1}}{\text{———}} C_{i,n-1} \overset{u_n}{\text{———}} X$$

sur

$$T \xleftarrow{\;s\;} Z \xrightarrow{\;p\;} X\,,$$

où (s,p) est le composé de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dans le sens défini au numéro 3.3.

L'inclusion canonique

$$i : \underline{\mathsf{Hom}}(T,X) \subset F_X(T)$$

est une section du foncteur $v : F_X(T) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(T, X)$ considéré ci-dessus, et on voit aussitôt qu'on a une transformation naturelle iv vers l'identité, de sorte que v est une équivalence d'homotopie faible argument par argument. En conclusion, on a le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} & L^H(\mathcal{C})(-,X) \\ h_X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & F_X \arrow[u] \arrow[d, "v"] \\ & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(-,X) \end{tikzcd}$$

Or l'inclusion $h_X \longrightarrow L^H(\mathcal{C})(-,X)$ est une équivalence faible de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$; cf. [DK87]. Il en résulte que le foncteur h est un facteur direct du foncteur $\underline{h}$ dans $\mathsf{Ho}(P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C}))$. Comme ce dernier respecte les carrés homotopiquement cartésiens (proposition 3.6), le plongement de Yoneda a la même propriété.

Le fait que h respecte les produits homotopiques finis provient de la stabilité des équivalences faibles par produits finis dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$, et du fait que h respecte l'objet final. □

3.11. Si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles fermée propre à droite, on dit qu'un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ est une *fibration faible* si pour tout diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "p''"] & X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p'"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y'' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

si u' est une équivalence faible, alors il en est de même de v' (cette notion a été introduite sous le nom de “sharp map” par Rezk [Rez98]). On vérifie aussitôt que les fibrations faibles sont stables par composition et par image inverse. Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ est une fibration faible si et seulement si tout carré cartésien de la forme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p'"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien ; voir [Cis06, proposition 1.5.18]. En particulier, les fibrations faibles triviales (i.e. qui sont aussi des équivalences faibles) sont stables par image inverse. Toute fibration de $\mathcal{M}$ est une fibration faible (c'est une simple reformulation de la notion même de propreté à droite).

Corollaire 3.12. *Le plongement de Yoneda $h : \mathcal{C} \longrightarrow P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ envoie les fibrations de $\mathcal{C}$ sur des fibrations faibles de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration de $\mathcal{C}$. Considérons un objet Y' de $\mathcal{C}$, un entier $n \geq 0$, et un morphisme $s : \Delta_n \times h(Y') \longrightarrow h(Y)$. Le morphisme s se factorise par la projection de $\Delta_n \times h(Y')$ sur $h(Y')$ suivi de l'image par h d'un morphisme $u : Y' \longrightarrow Y$. En notant $X' = Y' \times_Y X$, le produit fibré de $h(p)$ et de s se calcule donc à l'aide des carrés cartésiens suivants.

$$\begin{tikzcd}
\varDelta_n \times h(X') \arrow[r] \arrow[d] & h(X') \arrow[r] \arrow[d] & h(X) \arrow[d, "h(p)"] \\
\varDelta_n \times h(Y') \arrow[r] & h(Y') \arrow[r, "h(u)"'] & h(Y)
\end{tikzcd}$$

Le carré de gauche est trivialement homotopiquement cartésien, et le carré de droite est homotopiquement cartésien dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ par le théorème 3.10. Cela prouve que $h(p)$ est une fibration faible grâce au critère donné par [Cis06, corollaire 3.4.49]. □

Remarque 3.13. Le corollaire ci-dessus s'interprète en disant que le plongement de Yoneda est exact à gauche dans le sens suivant.

La catégorie de modèles fermée $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ étant propre, et les équivalences faibles de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ étant stables par produits finis (théorème 3.2), il existe une structure de catégorie d'objets fibrants sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{C}$: les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes qui sont des équivalences faibles (resp. des fibrations faibles) dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. D'après le corollaire 3.12, avec cette définition, le plongement de Yoneda préserve les fibrations et les fibrations triviales. Comme il commute aux limites projectives, c'est donc un foncteur exact à gauche au sens de [Cis08, 1.9].

3.14. On verra plus loin que la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a le type d'homotopie de l'espace des morphismes de X vers Y dans la localisée simpliciale de $\mathcal{C}$; cf. proposition 3.23. Il sera donc utile d'en calculer ses espaces de lacets de manière convenable. Considérons d'abord le cas où $X = \star$ est un objet final de $\mathcal{C}$.

Si $u : \star \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on définit l'objet des lacets $\Omega(Y,u)$ comme suit. On choisit un espace des chemins dans Y, c'est-à-dire une factorisation de la diagonale $Y \longrightarrow Y \times Y$ en une équivalence faible $s : Y \longrightarrow Y^I$ suivie d'une fibration $p : Y^I \longrightarrow Y \times Y$, et on forme le carré cartésien ci-dessous.

(3.14.1)
$$\begin{tikzcd}
\Omega(Y,u) \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & Y^I \arrow[d, "p"] \\
\star \arrow[r, "(u,u)"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

On vérifie immédiatement qu'on a le carré cartésien canonique ci-dessous.

(3.14.2)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\Omega(Y,u)) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y^I) \arrow[d, "p_*"] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\star) \arrow[r, "u_*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y \times Y)
\end{tikzcd}$$

Il résulte de la proposition 3.6 que le carré (3.14.2) est homotopiquement cartésien. De même, on a le carré homotopiquement cartésien suivant.

(3.14.3)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y \times Y) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y) \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,Y) \arrow[r] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\star)
\end{tikzcd}$$

D'autre part, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\star)$ admet un objet final, et donc, est contractile. Il en résulte que l'application canonique

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y\times Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y)\times \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y)$$

est une équivalence d'homotopie faible. En utilisant une nouvelle fois que la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star,\star)$ est contractile, l'équivalence faible

$$s_* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y^I)$$

nous montre ainsi grâce au carré homotopiquement cartésien (3.14.2) que le nerf de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, \Omega(Y,u))$ est l'espace des lacets de base u dans le nerf de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y)$.

Le morphisme q admet une section, induite par le morphisme su. Par abus, on notera encore u cette section, ce qui permet de définir des objets de lacets itérés $\Omega^n(Y,u)$, $n\geq 0$, en posant $\Omega^0(Y,u)=Y$, et

$$\Omega^{i+1}(Y,u)=\Omega(\Omega^i(Y,u),u)\ ,\quad i\geq 0 \tag{3.14.4}$$

(cela suppose le choix préalable d'un espace des chemins dans $\Omega^i(Y,u)$). Pour tout entier $n\geq 0$, on a ainsi une bijection :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{C}}(\star, \Omega^n(Y,u)) \simeq \pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y), u) \tag{3.14.5}$$

(où, par abus, on note encore u l'objet de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\star, Y)$ défini par $(1_\star, u)$).

3.15. On introduit à présent de nouvelles catégories d'objets fibrants. Étant donné un objet X de $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}//X$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}/X$ formée des fibrations de but X. Les équivalences faibles (resp. les fibrations) de $\mathcal{C}//X$ sont les morphismes au-dessus de X qui sont des équivalences faibles (resp. des fibrations) dans $\mathcal{C}$.

On dispose d'un foncteur exact à gauche

$$\mathcal{C}\longrightarrow \mathcal{C}//X\ ,\quad Y\longmapsto Y_X\ , \tag{3.15.1}$$

où Y_X désigne le produit $Y\times X$, vu comme un objet au-dessus de X via la projection canonique. On vérifie immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.16. *Pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, le foncteur*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)\longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}//X}(X,Y_X)\ ,\quad (s,p)\longmapsto (s,(s,p))$$

est un isomorphisme de catégories.

3.17. Soit $u : X\longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Il induit un morphisme $(1_X,u) : X\longrightarrow Y_X$. Pour $n\geq 0$, on pose

$$\Omega^n(Y,u)=\Omega^n(Y_X,(1_X,u))\,. \tag{3.17.1}$$

Proposition 3.18. *On a des bijections canoniques*

$$\pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),u)\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{C}//X}(X,\Omega^n(Y,u))\,.$$

Démonstration. En vertu du lemme précédent, on a un isomorphisme

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}//X}(X,Y_X)\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

qui envoie $(1_X,u)$ sur u. La proposition résulte donc de l'identification (3.14.5). □

3.19. Soit $\overline{\mathcal{C}}$ la catégorie d'objects fibrants fortement saturée associée à $\mathcal{C}$; cf. [Cis08, proposition 3.16]. Ce passage à la forte saturation est compatible avec les catégories $\mathcal{C}//X$ dans le sens suivant.

Lemme 3.20. *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, la catégorie d'objets fibrants fortement saturée associée à $\mathcal{C}//X$ n'est autre que $\overline{\mathcal{C}}//X$. En particulier, le foncteur canonique*

$$\mathsf{Ho}(\mathcal{C}//X) \longrightarrow \mathsf{Ho}(\overline{\mathcal{C}}//X)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Soit $u : Y_1 \longrightarrow Y_0$ un morphisme au-dessus de X, les flèches $Y_i \longrightarrow X$ étant des fibrations pour $i = 0, 1$. En vertu de [Cis08, lemme 2.17], si u admet une section dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$, alors il existe un morphisme $w : V \longrightarrow Y_1$ tel que uw soit une équivalence faible de $\mathcal{C}$. On peut alors factoriser w en une équivalence faible $W \longrightarrow Y_2$ suivie d'une fibration $v : Y_2 \longrightarrow Y_1$. Il est clair que uv est alors encore une équivalence faible de $\mathcal{C}$. Comme le morphisme de Y_2 vers X est à présent une fibration, on voit que uv est une équivalence faible de $\mathcal{C}//X$. Autrement dit, u admet une section dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ si et seulement si u admet une section dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C}//X)$. Une nouvelle utilisation de [Cis08, lemme 2.17] montre donc que u est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ si et seulement si u est un isomorphisme dans $\mathsf{Ho}(\mathcal{C}//X)$. La première assertion du lemme en résulte aussitôt, et la seconde est une conséquence immédiate de la première. □

Lemme 3.21. *Soit $\Psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories d'objets fibrants. Si le foncteur Ψ induit une équivalence de catégories $\mathsf{Ho}\,\mathcal{C} \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{C}'$, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur*

$$\mathcal{C}//X \longrightarrow \mathcal{C}'//\Psi(X)\ , \quad (Y \longrightarrow X) \longmapsto (\Psi(Y) \longrightarrow \Psi(X))$$

induit une équivalence de catégories $\mathsf{Ho}\,\mathcal{C}//X \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{C}'//\Psi(X)$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, on peut supposer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont fortement saturées. Si Ψ induit une équivalence au niveau des catégories homotopiques, alors, d'après [Cis08, théorème 3.19], il vérifie la propriété d'approximation au sens de [Cis08, 3.6] (c'est-à-dire la version duale de la condition donnée au numéro 2.1). Autrement dit, si X est un objet de $\mathcal{C}$, et Y un objet de $\mathcal{C}'$, pour tout morphisme $p : Y \longrightarrow \Psi(X)$ dans $\mathcal{C}'$, il existe un morphisme $u : X' \longrightarrow X$ dans $\mathcal{C}$, et des équivalences faibles $v : Y' \longrightarrow Y$ et $p' : Y' \longrightarrow \Psi(X')$ dans $\mathcal{C}'$, tels que le carré suivant commute dans $\mathcal{C}'$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] & \Psi(X) \\ Y' \arrow[u, "v"] \arrow[r, "p'"'] & \Psi(X') \arrow[u, "\Psi(u)"'] \end{tikzcd}$$

On peut en outre supposer que les morphismes u et v sont des fibrations (c'est la version duale du lemme 2.2). Cela implique immédiatement que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur induit $\mathcal{C}//X \longrightarrow \mathcal{C}'//\Psi(X)$ vérifie la propriété d'approximation. La preuve s'achève donc en invoquant à nouveau [Cis08, théorème 3.19]. □

Lemme 3.22. *Soit $\Psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories d'objets fibrants. Si le foncteur induit $\Psi : \mathsf{Ho}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{C}'$ est une équivalence de catégories, alors, pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, il induit une équivalence d'homotopie faible*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X), \Psi(Y))\,.$$

Démonstration. Supposons que Ψ induise une équivalence de catégories homotopiques, et considérons deux objets X et Y de $\mathcal{C}$. On veut donc montrer que le morphisme

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X),\Psi(Y))$$

est une équivalence d'homotopie faible. On sait déjà qu'un tel morphisme induit une bijection au niveau des ensembles de composantes connexes. Il reste donc à prouver que pour tout objet (s,p) de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, et pour tout entier $n>0$, l'application

$$\pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),(s,p)) \longrightarrow \pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X),\Psi(Y)),(\Psi(s),\Psi(p)))$$

est bijective. Pour cela, on peut toujours supposer que $s=1_X$. En effet, si $s:Z\longrightarrow X$ est une fibration triviale, et $p:Z\longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$, le foncteur

$$s^* : \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$$

est une équivalence d'homotopie faible qui envoie la composante connexe de (s,p) sur la composante connexe de $(1_X,p)$.

Le foncteur Ψ respecte les équivalences faibles et les fibrations. Il respecte donc aussi les espaces de chemins. Comme il commute aux limites projectives finies adéquates, on en déduit que, pour tout morphisme $u:X\longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, et pour tout entier $n\geq 0$, on peut construire $\Omega^n(Y,u)$ et $\Omega^n(\Psi(Y),\Psi(u))$ de sorte que

$$\Psi(\Omega^n(Y,u)) = \Omega^n(\Psi(Y),\Psi(u))$$

dans $\mathcal{C}'//\Psi(X)$. En vertu du lemme 3.21, on a donc des bijections canoniques

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{C}//X}(X,\Omega^n(Y,u)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}\,\mathcal{C}'//\Psi(X)}(\Psi(X),\Omega^n(\Psi(Y),\Psi(u)))\,,$$

lesquelles se traduisent, via la proposition 3.18, en des bijections

$$\pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y),u) \simeq \pi_n(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}'}(\Psi(X),\Psi(Y)),\Psi(u))\,.$$

Cela achève la démonstration. □

Proposition 3.23. *Le morphisme* (3.8.2) *est une équivalence faible de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. Autrement dit, pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, le nerf de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a le type d'homotopie de l'espaces des morphismes de X vers Y dans la localisation simpliciale de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles.*

Démonstration. Cette proposition est vraie dans le cas où $\mathcal{C}$ admet une factorisation fonctorielle de toute flèche en une équivalence faible suivie d'une fibration. Pour le voir, on constate d'abord que, dans ce cas, on peut construire facilement une équivalence d'homotopie entre le nerf de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et l'espace des morphismes de X vers Y dans la localisation "hammock" de $\mathcal{C}$ par ses fibrations triviales ; cf. [DK80a, proposition 8.2]. Or il résulte de [Bro73, I.1 Fatorization Lemma], de [DK80b, proposition 10.5], et de [DK80a, proposition 2.2] que la localisation simpliciale de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles est simplicialement équivalente à la localisation simpliciale de $\mathcal{C}$ par ses fibrations triviales, ce qui implique notre assertion.

Pour démontrer le cas général, on considère la catégorie $\mathcal{C}'$, définie comme la sous-catégorie pleine de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ formée des préfaisceaux simpliciaux qui sont isomorphes à des préfaisceaux représentables dans $\mathsf{Ho}\,P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. Il résulte du théorème 3.10 et de la remarque 3.13 que la catégorie $\mathcal{C}'$ est munie d'une structure de catégorie d'objets fibrants dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les équivalences faibles (resp. les fibrations faibles) de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. D'autre part, en vertu du corollaire 3.12, le plongement de Yoneda induit un foncteur exact à gauche

$$h' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' .$$

Le foncteur h' induit une équivalence après localisation simpliciale : en effet, la sous-catégorie simpliciale pleine de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ formée des objets à la fois fibrants et cofibrants qui sont isomorphes à des préfaisceaux représentables dans $\mathsf{Ho}\, P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ est la localisée simpliciale de $\mathcal{C}$ (d'après [DK87]), et il est facile de voir que c'est aussi la localisée simpliciale de $\mathcal{C}'$. En vertu du lemme 3.22, il suffit donc de démontrer la proposition pour $\mathcal{C}'$. Or la catégorie d'objets fibrants $\mathcal{C}'$ admet des factorisations fonctorielles, et nous sommes ainsi réduit à une situation déjà connue. □

3.24. Rappelons que nous notons $L^H(\mathcal{C})$ la localisation "hammock" de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles ; cf. [DK80a].

Théorème 3.25. *Soit $\Psi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories d'objets fibrants. Si le foncteur induit $\mathsf{Ho}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ho}\,\mathcal{C}'$ est une équivalence de catégories, alors, le foncteur Ψ induit une équivalence de catégories simpliciales*

$$L^H(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} L^H(\mathcal{C}') .$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement du lemme 3.22 et de la proposition précédente. □

Remarque 3.26. Le théorème précédent montre en particulier que, si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'objets fibrants, et si $\overline{\mathcal{C}}$ désigne la catégorie d'objets fibrants fortement saturée associée à $\mathcal{C}$, alors on a une équivalence simpliciale $L^H(\mathcal{C}) \simeq L^H(\overline{\mathcal{C}})$ (ce qui se déduit aussi directement en considérant la propriété universelle de la localisation simpliciale ; cf. [DK80b, proposition 3.5]).

4. Foncteurs homotopiquement exacts

4.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux catégories de Waldhausen dérivables. Un foncteur $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est *homotopiquement exact à droite* s'il vérifie les conditions suivantes.

HE1 Le foncteur Φ respecte les équivalences faibles.

HE2 Le morphisme $0 \longrightarrow \Phi(0)$ est une équivalence faible.

HE3 Le foncteur Φ respecte les carrés homotopiquement cocartésiens.

On rappelle qu'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "i'"] \\ Y \arrow[r, "b"'] & Y' \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{A}$ est homotopiquement cocartésien si Y' est la colimite homotopique du diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X' \\ Y & \end{tikzcd}$$

(ou, de manière équivalente, si le carré commutatif considéré est homotopiquement cartésien dans la catégorie d'objets fibrants $\mathcal{A}^{op}$; cf. 3.9).

Par exemple, en vertu de [Cis08, (version duale de la) proposition 3.4], tout foncteur exact à droite est homotopiquement exact à droite.

4.2. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie de Waldhausen dérivable. Pour chaque entier $n \geq 0$, on note $\mathsf{S}^h_n\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de de $\mathcal{A}^{\mathsf{Fl}\,\Delta_n}$ formée des objets X vérifiant les deux conditions (a) et (b) ci-dessous.

(a) Pour tout i, le morphisme $0 \longrightarrow X_{ii}$ est une équivalence faible.

(b) Pour tous $i \leq j \leq k$, le carré commutatif ci-dessous est homotopiquement cocartésien dans $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} X_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_{ik} \arrow[d] \\ X_{jj} \arrow[r] & X_{jk} \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{w}\mathsf{S}^h_n\mathcal{A}$ la sous-catégorie de $\mathsf{S}^h_n\mathcal{A}$ formée des équivalences faibles argument par argument. On note $\mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}$ la diagonale de l'ensemble bisimplicial correspondant (obtenu en prenant les nerfs des catégories $\mathrm{w}\mathsf{S}^h_n\mathcal{A}$). On a, par construction, une inclusion d'ensembles simpliciaux, fonctorielle relativement aux morphismes exacts.

$$\mathrm{w}\mathsf{S}\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A} \tag{4.2.1}$$

La construction $\mathcal{A} \longmapsto \mathsf{S}^h\mathcal{A}$ est quant à elle fonctorielle relativement aux foncteurs homotopiquement exacts à droite. Cependant, pour disposer d'un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux pointés, on modifie $\mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}$ comme suit. Soit $\mathcal{A}^{\mathrm{w}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets X tels que $0 \longrightarrow X$ soit une équivalence faible. On munit $\mathcal{A}^{\mathrm{w}}$ d'une structure de catégorie exacte dérivable, en prenant pour équivalences faibles (resp. pour cofibrations), les morphismes de $\mathcal{A}^{\mathrm{w}}$ qui sont des équivalences faibles (resp. des cofibrations) dans $\mathcal{A}$. L'inclusion $\mathcal{A}^{\mathrm{w}} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur exact, et induit donc un monomorphisme d'ensembles simpliciaux de la forme $\mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}^{\mathrm{w}} \longrightarrow \mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}$. Cela permet de former le carré cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}^{\mathrm{w}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A} \arrow[d] \\ pt \arrow[r] & \mathrm{w}\mathsf{S}'\mathcal{A} \end{tikzcd}$$

L'ensemble simplicial $\mathrm{w}\mathsf{S}'\mathcal{A}$ est canoniquement pointé, et on dispose à présent d'un foncteur $\mathcal{A} \longmapsto \mathrm{w}\mathsf{S}'\mathcal{A}$ de la catégorie des catégories dérivables (avec pour morphismes, les foncteurs homotopiquement exacts) vers la catégorie des ensembles simpliciaux pointés. Les ensembles simpliciaux $\mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A}^{\mathrm{w}}$ étant asphériques, par construction, on a des équivalences faibles de la forme

$$\mathrm{w}\mathsf{S}^h\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{w}\mathsf{S}'\mathcal{A}\,.$$

Dorénavant, l'espace de K-théorie d'une catégorie de Waldhausen dérivable $\mathcal{A}$ sera défini par l'équation

$$K(\mathcal{A}) = \Omega(\mathrm{Ex}^\infty\,\mathrm{w}\mathsf{S}'\mathcal{A})\,. \tag{4.2.2}$$

Cela est justifié par l'énoncé suivant.

Proposition 4.3. *Le morphisme* (4.2.1) *est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. On va montrer que pour tout $n \geq 0$, le nerf du foncteur

$$\mathrm{w}\mathsf{S}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{w}\mathsf{S}_n^h\mathcal{A}$$

est une équivalence d'homotopie faible. Pour cela, on considère $\mathsf{S}_n^h\mathcal{A}$ comme une catégories de Waldhausen avec pour équivalences faibles (resp. cofibrations) les équivalences faibles (resp. les cofibrations argument par argument) ; cf. proposition 1.2. La catégorie $\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ est quant à elle munie de la structure de catégorie de Waldhausen considérée au numéro 2.12. Il est alors clair que l'inclusion de $\mathsf{S}_n\mathcal{A}$ dans $\mathsf{S}_n^h\mathcal{A}$ est exacte. On vérifie alors facilement que le foncteur $\mathsf{S}_n\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{S}_n^h\mathcal{A}$ vérifie la propriété d'approximation forte. La proposition 1.10 permet donc de conclure. □

4.4. Considérons la catégorie d'objets fibrants $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{op}$. Notons $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$ la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés sur $\mathcal{C}$, munie de la structure de catégorie de modèles induite par $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$.

Soit $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux simpliciaux poinés sur $\mathcal{C}$ dont les objets sont les préfaisceaux simpliciaux qui sont isomorphes à un préfaisceau représentable dans $\mathsf{Ho}\, P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. La catégorie $\mathcal{C}'$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie d'objets fibrants induite par la structure de catégorie d'objets fibrants décrite dans la remarque 3.13 : les équivalences faibles (resp. les fibrations) de $\mathcal{C}$ sont les morphismes qui sont des équivalences faibles (resp. des fibrations faibles) dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$ (cette structure sur $\mathcal{C}'$ est bien définie, puisque $\mathcal{C}'$ est stable par produits fibrés homotopiques dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$). On définit par aillleurs $\mathcal{C}''$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}'$ formée des objets qui sont fibrants au sens de la structure de catégorie de modèles fermée sur $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$. C'est une catégorie d'objets fibrants, dont les équivalences faibles et les fibrations sont celles de la catégorie de modèles fermée $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$. On dispose de deux foncteurs

$$\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}' \xleftarrow{i} \mathcal{C}'' . \tag{4.4.1}$$

En posant $\mathcal{A}' = \mathcal{C}'^{op}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{C}''^{op}$, on obtient de la sorte des foncteurs exacts à droite entre catégories de Waldhausen dérivables.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{k} \mathcal{A}' \xleftarrow{j} \mathcal{A}'' . \tag{4.4.2}$$

La catégorie $\mathcal{A}''$ est par ailleurs la catégorie sous-jacente à une catégorie simpliciale qui n'est autre que la localisée simpliciale de $\mathcal{A}$. Le diagramme (4.4.2) est donc une manière de voir le foncteur canonique de $\mathcal{A}$ vers sa localisée simpliciale en termes de foncteurs exacts à droite. Les catégories $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont, en outre, fortement saturées.

Proposition 4.5. *Les foncteurs j et k du diagramme (4.4.2) induisent des équivalences de catégories simpliciales au sens de Dwyer et Kan. Le foncteur j induit une équivalence en K-théorie, et si, en outre, la catégorie $\mathcal{A}$ est fortement saturée, il en est de même du foncteur k.*

Démonstration. Le fait que j induise une équivalence après localisation simpliciale est évident, et n'est mentionnée ici que pour mémoire. Le cas du foncteur k se démontre comme suit.

Étant donnée une catégorie de modèles $\mathcal{M}$, d'objet final $\star$, considérons la catégorie $\mathcal{M}_\bullet$ des objets pointés de $\mathcal{M}$ (*i.e.* $\mathcal{M}_\bullet = \star\backslash\mathcal{M}$). Notons $Map(X, Y)$ l'espace des morphismes de X vers Y (pour X et Y dans $\mathcal{M}$). Pour chaque choix d'un point base x de X et d'un point base y de Y, l'espace des morphismes de (X, x) vers (Y, y) dans $\mathcal{M}_\bullet$ est la fibre homotopique au-dessus de $y : \star \longrightarrow Y$ de l'application de $Map(X,Y)$ dans $Map(\star,Y)$ induite par $x:\star\longrightarrow X$. Ce calcul permet de voir que le foncteur d'oubli de $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$ dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathsf{Ho}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathsf{Ho}(P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet)\,.$$

En effet, si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, et si $\mathsf{R}h(Y)$ désigne un remplacement fibrant de $h(Y)$ dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$, il résulte de la proposition 3.23 que l'ensemble simplicial $Map(h(X),\mathsf{R}h(Y))$ a le type d'homotopie de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, et, si 0 désigne l'objet nul de $\mathcal{C}$, $Map(\star,\mathsf{R}h(Y))=Map(h(0),\mathsf{R}h(Y))$ a le type d'homotopie de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{C}}(0,Y)$. Or cette dernière est contractile (car on vérifie aussitôt qu'elle admet un objet initial), ce qui montre qu'il revient au même de calculer les espaces de morphismes entre $h(X)$ et $h(Y)$ dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})_\bullet$ ou dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C})$. Le fait que k induise une équivalence après localisation simpliciale résulte donc du lemme de Yoneda simplicial démontré par Dwyer et Kan dans [DK87].

Le reste de la proposition résulte du théorème 2.15. □

Proposition 4.6. *Tout foncteur homotopiquement exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables fortement saturées induisant une équivalence après localisation simpliciale induit une équivalence en K-théorie.*

Démonstration. Soit $\Phi:\mathcal{A}_0\longrightarrow\mathcal{A}_1$ un foncteur homotopiquement exact entre catégories de Waldhausen induisant une équivalence après localisation simpliciale. En considérant la catégorie d'objets fibrants $\mathcal{C}_e=\mathcal{A}_e^{op}$, $e=0,1$, on dispose des foncteurs

$$\mathcal{A}_e\xrightarrow{k_e}\mathcal{A}'_e\xleftarrow{j_e}\mathcal{A}''_e$$

construits au numéro (4.4.2). Le foncteur $\Psi=\Phi^{op}$ induit une adjonction de Quillen

$$\Psi_!:P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C}_0)_\bullet\rightleftarrows P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C}_1)_\bullet:\Psi^*$$

Comme Φ (et donc Ψ) induit une équivalence au niveau des localisées de Dwyer-Kan, cette adjonction de Quillen est en fait une équivalence de Quillen. En choisissant une résolution cofibrante fonctorielle Q dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C}_0)_\bullet$, on construit à partir du foncteur $\Psi_!$ un foncteur $\Psi_!Q$ qui induit par restriction un foncteur

$$\Phi'=(\Psi_!Q)^{op}|_{\mathcal{A}'_0}:\mathcal{A}'_0\longrightarrow\mathcal{A}'_1\,,$$

lequel a le mérite d'être homotopiquement exact à droite. On obtient, de plus, une équivalence faible naturelle

$$k_1\Phi(X)\longrightarrow\Phi'k_0(X)$$

pour tout objet X de $\mathcal{A}_0$. Il est donc clair, d'après la proposition 4.5, que Φ induit une équivalence en K-théorie si et seulement si Φ' a la même propriété.

Le foncteur Ψ^* respecte les équivalences faibles entre objets fibrants, et induit donc un foncteur

$$\psi''=(\Psi^*)^{op}|_{\mathcal{A}''_1}:\mathcal{A}'_1\longrightarrow\mathcal{A}'_0\,.$$

Soit R une résolution fibrante fonctorielle dans $P_{\mathrm{w}}(\mathcal{C}_1)_\bullet$. Le foncteur Ψ^*R respecte les équivalences faibles, et induit donc un foncteur

$$\psi'=(\Psi^*R)^{op}|_{\mathcal{A}'_1}:\mathcal{A}'_1\longrightarrow\mathcal{A}'_0\,.$$

On obtient ainsi le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}'_0 & \mathcal{A}''_0 \arrow[l, "j_0"'] \\ \mathcal{A}'_1 \arrow[u, "\psi'"] & \mathcal{A}''_1 \arrow[l, "j_1"] \arrow[u, "\psi''"'] \end{tikzcd}$$

Ce carré ne commute pas, mais on dispose d'un morphisme fonctoriel

$$\psi' j_1(X) \longrightarrow j_0 \psi''(X)$$

qui a le bon goût d'être une équivalence faible. Or ψ'' est un foncteur exact à droite, et donc, en vertu du théorème 2.15, il induit une équivalence en K-théorie. Par conséquent, le foncteur ψ' est homotopiquement exact à droite, et induit une équivalence en K-théorie. Soit $L : \mathcal{A}'_0 \longrightarrow \mathcal{A}'_0$ le foncteur induit par la résolution cofibrante Q choisie plus haut. C'est un foncteur homotopiquement exact à droite, et on dispose, par construction de Q, d'une équivalence faible naturelle $X \longrightarrow L(X)$ pour tout objet X' de $\mathcal{A}'_0$. On en déduit que L induit une équivalence en K-théorie. L'unité de l'adjonction $(\Psi_!, \Psi^*)$ nous fournit une équivalence faible naturelle $\psi'\Phi'(X) \longrightarrow L(X)$ pour tout objet X' de $\mathcal{A}'_0$. On en déduit aussitôt que le foncteur composé $\psi'\Phi'$ induit lui aussi une équivalence en K-théorie. Par conséquent, il en est de même du foncteur Φ', ce qui achève la démonstration. □

Remarque 4.7. Une preuve plus conceptuelle de la proposition précédente est la suivante. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie de Waldhausen dérivable fortement saturée, il résulte de la proposition 4.5 et des théorèmes 2.9 et 3.25 que la K-théorie de $\mathcal{A}$ coïncide avec la K-théorie de sa localisation simpliciale au sens de Toën et Vezzosi [TV04]. Tout foncteur homotopiquement exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables induisant un foncteur qui commute aux colimites homotopiques finies après localisation simpliciale, la proposition ci-dessus résulte de l'invariance de la K-théorie des catégories simpliciales par équivalences dérivées (laquelle est beaucoup plus triviale). Ceci dit, la construction qui va suivre (4.12) nous dit essentiellement que toute la fonctorialité des catégories simpliciales pointées et admettant des limites inductives homotopiques finies peut toujours s'exprimer en termes de foncteurs exacts à droite entre catégories de Waldhausen dérivables (et fortement saturées).

4.8. Considérons une catégorie de Waldhausen dérivable $\mathcal{A}$.

Notons $P(\mathcal{A})$ la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{A}$. On appelle *cofibrations épaissies* les éléments de la plus petite classe de morphismes de $P(\mathcal{A})$, stable par image directe, composition transfinie, et rétracte, contenant les morphismes de la forme

$$\partial\,\Delta_n \times h(X) \longrightarrow \Delta_n \times h(X)\,,$$

pour tout objet X de $\mathcal{A}$, et tout entier $n \geq 0$, ainsi que les morphismes de la forme

$$h(i) : h(X) \longrightarrow h(Y)\,,$$

pour tout monomorphisme scindé $i : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{A}$, tel que le morphisme $0 \longrightarrow X$ soit une équivalence faible de $\mathcal{A}$.

Lemme 4.9. *La catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre, dont les équivalences faibles sont les* *équivalences d'homotopie faibles argument par argument, et dont les cofibrations sont les cofibrations épaissies.*

Démonstration. Tout morphisme préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{A}$ ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations épaissies est une fibration de Kan triviale argument par argument, et donc, une équivalence d'homotopie faibles argument par argument. L'existence de cette structure de catégorie de modèles fermée résulte donc de l'existence de la structure de catégorie de modèles injective sur $P(\mathcal{A})$ et de [Cis06, théorème 1.6.2]. La propreté de la structure injective implique celle de cette nouvelle structure de catégorie de modèles d'après [*ibidem*, corollaire 1.5.21]. □

4.10. On note $P'(\mathcal{A})_\bullet$ la catégorie des ensembles simpliciaux pointés sur $\mathcal{A}$, munie de la structure de catégorie de modèles fermée induite par le lemme 4.9 (autrement dit, les équivalences faibles sont les les équivalences d'homotopie faibles argument par argument, et les cofibrations sont les cofibrations épaissies). Il est remarquable que pour tout objet X de $\mathcal{A}$, le préfaisceau représentable $h(X)$, vu comme un objet pointé, est cofibrant pour cette structure de catégorie de modèles fermée (c'est entre autre pour cela que l'on a "épaissi" les cofibrations).

On définit $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{A})_\bullet$ comme la localisation de Bousfield à gauche de $P'(\mathcal{A})_\bullet$ par les équivalences faibles de $\mathcal{A}$ (vues commes des morphismes de préfaisceaux via le plongement de Yoneda).

On définit enfin $P_{ex}(\mathcal{A})$ comme la localisation de Bousfield à gauche de $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{A})_\bullet$ par les morphismes de la forme

$$h(Y) \amalg^{\mathsf{L}}_{h(X)} h(X') \longrightarrow h(Y')\,,$$

(où $h(Y) \amalg^{\mathsf{L}}_{h(X)} h(X')$ désigne la somme amalgamée homotopique) induits par des carrés cocartésiens de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "i'"] \\ Y \arrow[r, "b"'] & Y' \end{tikzcd}$$

dans lesquels i est une cofibration.

Les objets locaux de $P_{ex}(\mathcal{A})$ sont les préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{A}$ qui envoient les équivalences faibles de $\mathcal{A}$ sur des équivalences d'homotopie faibles d'ensembles simpliciaux, et qui envoient les carrés homotopiquement cocartésiens de $\mathcal{A}$ sur des carrés homotopiquement cartésiens d'ensembles simpliciaux. Autrement dit, ce sont les foncteurs homotopiquement exacts à droite de $\mathcal{A}$ vers la catégorie opposée de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés.

Soit $Ex(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $P_{ex}(\mathcal{A})$ formée des objets cofibrants (au sens épaissi) et isomorphes à des préfaisceaux représentables dans $\mathsf{Ho}\,P_{ex}(\mathcal{A})$. On verra la catégorie $Ex(\mathcal{A})$ comme une catégorie de Waldhausen dérivable (et fortement saturée), dont les équivalences faibles et les cofibrations sont celles de $P_{ex}(\mathcal{A})$.

Proposition 4.11. *Le plongement de Yoneda définit un foncteur homotopiquement exact à droite $h_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ex}(\mathcal{A})$ qui induit une équivalence après localisation simpliciale.*

Démonstration. Le fait que le foncteur $h_{\mathcal{A}}$ soit homotopiquement exact résulte de la définition même de $P_{ex}(\mathcal{A})$.

Notons R une résolution fibrante fonctorielle dans la catégorie de modèles fermée $P'_{\mathrm{w}}(\mathcal{A})_\bullet$. Si $h : \mathcal{A} \longrightarrow P(\mathcal{A})$ désigne le plongement de Yoneda, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{Ho}\, P_{\mathrm{w}}(\mathcal{A})_\bullet$

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(-, X) \simeq \mathsf{R}h(X)\,,$$

où, pour tout couple d'objets (T, X) dans $\mathcal{A}$, $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(T, X)$ désigne l'espace des morphismes de T vers X dans la localisée simpliciale de $\mathcal{A}$. Le théorème 3.10 appliqué à $\mathcal{A}^{op}$ s'interprète alors en disant que, pour tout objet X de $\mathcal{A}$, le préfaisceau simplicial $\mathsf{R}h(X)$ est fibrant dans $P_{ex}(\mathcal{A})$. Cela implique aussitôt que le foncteur $h_{\mathcal{A}}$ induit une équivalence après localisation simpliciale. $\square$

4.12. Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur homotopiquement exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables. Considérons le foncteur $\Phi_!$ obtenu comme l'extension de Kan à gauche de Φ le long du plongement de Yoneda de $\mathcal{A}$ dans $P(\mathcal{A})_\bullet$. On vérifie immédiatement, par définition de $P_{ex}(\mathcal{A})$, qu'il définit un foncteur de Quillen à gauche

$$\Phi_! : P_{ex}(\mathcal{A}) \longrightarrow P_{ex}(\mathcal{A}')\,. \tag{4.12.1}$$

Le foncteur $\Phi_!$ envoie $\mathrm{Ex}(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Ex}(\mathcal{A}')$. On obtient de la sorte un foncteur encore noté

$$\Phi_! : \mathrm{Ex}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ex}(\mathcal{A}')\,. \tag{4.12.2}$$

Ce dernier intervient dans le carré ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "h_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathrm{Ex}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\Phi_!"] \\ \mathcal{A}' \arrow[r, "h_{\mathcal{A}'}"'] & \mathrm{Ex}(\mathcal{A}') \end{tikzcd} \tag{4.12.3}$$

Le foncteur (4.12.2) est la restriction d'un foncteur de Quillen à gauche, ce qui implique que c'est un foncteur exact à droite.

Le carré (4.12.3) est (essentiellement) commutatif si et seulement si le foncteur Φ préserve les objets nuls. Dans le cas général, il ne commute pas, mais on a néanmoins un morphisme fonctoriel

$$h_{\mathcal{A}'}\Phi(X) \longrightarrow \Phi_! h_{\mathcal{A}}(X) \tag{4.12.4}$$

qui a le bon goût d'être une équivalence faible : il provient d'un carré cocartésien de la forme

$$\begin{tikzcd} h_{\mathcal{A}'}\Phi(0) \arrow[r] \arrow[d] & h_{\mathcal{A}'}(0) \arrow[d] \\ h_{\mathcal{A}'}\Phi(X) \arrow[r] & \Phi_! h_{\mathcal{A}}(X) \end{tikzcd}$$

dont la flèche horizontale supérieure est une équivalence faible, et la flèche verticale de gauche, une cofibration épaissie ; la structure de catégorie de modèles fermée du lemme 4.9 étant propre à gauche, cela montre que le carré ci-dessus est homotopiquement cocartésien, et implique donc bien que (4.12.4) est une équivalence faible

La construction $\mathcal{A} \longmapsto \mathrm{Ex}(\mathcal{A})$ est donc un (pseudo-)foncteur qui envoie les catégories de Waldhausen dérivables sur des sous-catégories de Waldhausen de catégories de modèles fermée simpliciales avec factorisations fonctorielles, et qui envoie les foncteurs homotopiquement exacts à droite sur des foncteurs exacts, obtenus commes des restrictions de foncteurs de Quillen à gauche. Le foncteur induit par le plongement de Yoneda $h_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ex}(\mathcal{A})$ est un 2-morphisme lax de foncteurs (une transformation naturelle à homotopie cohérente près). En outre, si le foncteur $\Phi_!$ du diagramme (4.12.2) induit une équivalence après localisation simpliciale, alors le foncteur (4.12.1) est une équivalence de Quillen.

Corollaire 4.13. *Un foncteur homotopiquement exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables induit une équivalence de catégories homotopiques si et seulement s'il induit une équivalence entre les localisations simpliciales correspondantes.*

Démonstration. La proposition 4.11, le carré (4.12.3), et la transformation naturelle (4.12.4) montrent qu'il suffit de traiter le cas d'un foncteur exact à droite. Ce corollaire résulte donc de la version duale du théorème 3.25. □

Corollaire 4.14. *Soit $\Phi\ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur homotopiquement exact à droite entre catégories de Waldhausen dérivables induisant une équivalence de catégories homotopiques $\mathsf{Ho}\,\mathcal{A} \simeq \mathsf{Ho}\,\mathcal{A}'$. Alors Φ induit une équivalence d'homotopie $K(\overline{\mathcal{A}}) \simeq K(\overline{\mathcal{A}'})$. En particulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont fortement saturées, alors Φ induit une équivalence d'homotopie*

$$K(\Phi) : K(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{A}')\ .$$

Démonstration. Cela résulte du corollaire précédent, de la proposition 4.6, et de la construction explicitée au numéro 4.12. □

Scholie 4.15. La construction donnée au numéro 4.12 permet de comprendre la K-théorie des catégories simpliciales en termes de catégories de Walhausen dérivables fortement saturées. Si T est une catégorie simpliciale avec un objet (homotopiquement) nul admettant des colimites (homotopiques) finies, on peut considérer la catégorie $P(T)_\bullet$ des préfaisceaux simpliciaux pointés, munie de la structure de catégorie de modèles projective, puis considérer la localisation de Bousfield à gauche $P_{ex}(T)$ de $P(T)$ dont les objets locaux sont les foncteurs simpliciaux de T^{op} dans la catégorie simpliciale des complexes qui commutent aux colimites finies. On note alors $M(T)$ la sous-catégorie simpliciale pleine de $P_{ex}(T)$ formée des préfaisceaux simpliciaux cofibrants faiblement équivalents à un préfaisceau représentable. La catégorie $M(T)$ est une catégorie de Waldhausen dérivable fortement saturée (obtenue comme une sous-catégorie de Waldhausen de $P_{ex}(T)$). Si $\Phi : T \longrightarrow T'$ est un foncteur simplicial qui commute aux colimites finies (au sens homotopique), son extension de Kan à gauche

$$\Phi_! : P(T) \longrightarrow P(T')$$

induit par restriction un foncteur exact (à droite)

$$M(\Phi) : M(T) \longrightarrow M(T')\,.$$

On obtient de la sorte un (pseudo-)foncteur de la 2-catégorie des catégories simpliciales admettant un objet nul et des colimites finies vers la 2-catégorie des catégorie de Waldhausen dérivables fortement saturées. On peut alors définir la K-théorie d'une catégorie simpliciale T en posant $K(T) = K(M(T))$. Les résultats ci-dessus permettent de voir que l'on retrouve de la sorte une définition équivalente à celle de Toën et Vezzosi [TV04] (avec l'avantage que cette définition est d'avantage fonctorielle). Enfin, les propositions 4.6 et 4.11 peuvent se reformuler en affirmant que l'on a des équivalences d'homotopie faibles fonctorielles

$$K(\overline{\mathcal{A}}) \simeq K(\mathrm{Ex}(\mathcal{A})) \simeq K(M(\mathrm{Ex}(\mathcal{A})))$$

pour toute catégorie de Waldhausen dérivable $\mathcal{A}$.

Références

[BM07] A. J. Blumberg and M. A. Mandell, *Algebraic K-theory and abstract homotopy theory*, arXiv :0708.0206, 2007.

[Bro73] K. S. Brown, *Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology*, Transactions of the A.M.S. **186** (1973), 419–458.

[Cis06] D.-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Soc. Math. France, 2006.

[Cis08] ———, *Catégories dérivables*, prépublication disponible à l'adresse http://www-math.univ-paris13.fr/~cisinski/, 2008.

[DG99] J. Dalpayrat-Glutron, *Équivalences dérivées et K-théorie d'après Thomason-Trobaugh*, Mémoire de DEA de l'université Paris 7, 1999.

[DK80a] W. G. Dwyer and D. M. Kan, *Calculating simplicial localizations*, J. Pure Appl. Algebra **18** (1980), 17–35.

[DK80b] ———, *Simplicial localizations of categories*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), 267–284.

[DK87] ———, *Equivalences between homotopy theories of diagrams*, Algebraic topology and algebraic K-theory, Annals of Math. Studies, vol. 113, Princeton University Press, 1987, pp. 180–205.

[DS04] D. Dugger and B. Shipley, *K-theory and derived equivalences*, Duke Math. J. **124** (2004), no. 3, 587–617.

[Gro03] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003, édition anotée et recomposée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag.

[Hir03] P. S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Math. surveys and monographs, vol. 99, Amer. Math. Soc., 2003.

[Kan59] D.M. Kan, *On c.s.s. complexes*, Amer. J. Math. **179** (1959), 449–476.

[Qui73] D. Quillen, Higher algebraic K-theory, *Higher K-theories I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341, pp. 85–147, Springer-Verlag, 1973.

[Rez98] C. Rezk, *Fibrations and homotopy colimits of simplicial sheaves*, arXiv :math/9811038, 1998.

[Sag04] S. Sagave, *On the algebraic K-theory of model categories*, J. Pure Appl. Algebra **190** (2004), no. 1-3, 329–340.

[Sch06] M. Schlichting, *Negative K-theory of derived categories*, Math. Z. **253** (2006), no. 1, 97–134.

[TT90] R. Thomason and T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift III, Birkhäuser, 1990, pp. 247–435.

[TV04] B. Toën and G. Vezzosi, *A remark on K-theory and S-categories*, Topology **43** (2004), no. 4, 765–791.

[Wal85] F. Waldhausen, Algebraic K-theory of spaces, *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1126, pp. 318–419, Springer-Verlag, 1985.

[Wei99] M. Weiss, *Hammock localizations in Waldhausen categories*, J. Pure Appl. Algebra **138** (1999), 185–195.

LAGA, CNRS (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, Av. Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

E-mail address: cisinski@math.univ-paris13.fr

URL: http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/